

## RAYONNEMENT ACOUSTIQUE EXTERIEUR DE COQUES INFINIES PRESENTANT DES PETITS DEFAUTS DE CIRCULARITE.

B. Laulagnet

Laboratoire Vibrations-Acoustique BT 303 INSA LYON - 20 Avenue A. Einstein  
69621 Villeurbanne Cedex.

### ABSTRACT

When sound radiation or sound transmission comparisons are made between experiments and numerical results using the thin shell theory with constant radius (Donnel or Flugge operators for example) discrepancies occur in a low frequency range located well below the shell critical frequency. The aim of this work is to show numerically the influence of small defects of curvature on the sound radiation by infinite cylinders. The method deals with a distorted thin shell operator in which the non-constant radius is expanded in Taylor series where harmonics take into account the shell defects of curvature of any order. The outer acoustic medium is split in two regions ; a small one between the distorted shell and an arbitrary circle of constant radius  $a_0$  in which a modified Helmholtz equation is solved taking into account the variation of radius ; and an other one of infinite extent for radii greater than  $a_0$  where the classical solution using Hankel functions is valuable. Providing the harmonics of the shell non-constant radius are not too strong compared to the shell mean-radius, a global solution is found which allows us to show the influence of defects of curvature in radiated power, radial quadratic velocity and radiation factor of a distorted shell in water.

### RESUME

Cet article présente le rayonnement acoustique extérieur de coques quasi-cylindriques infinies, excitées par une force mécanique ponctuelle harmonique, dont le rayon est affligé de petites variations. Les vibrations de la coque sont modélisées à partir d'un opérateur de coque mince à rayon variable. Dans la mesure où le milieu acoustique extérieur à la coque n'est plus à géométrie séparable, le problème extérieur est scindé en deux régions : une première extérieure à un rayon constant arbitraire où la pression vérifie l'équation d'Helmholtz en coordonnées cylindriques ; une région intermédiaire limitée par la surface de la coque non cylindrique et la surface cylindrique intermédiaire où la pression vérifie une équation d'Helmholtz modifiée intégrant les variations de rayon. La solution du problème acoustique intermédiaire est déterminée par une méthode asymptotique tant que l'épaisseur de cette région reste petite devant la longueur d'onde acoustique. Les résultats numériques mettent en évidence l'influence de défauts de rayon sur le rayonnement acoustique extérieur d'une coque dans l'eau lorsque la fréquence d'émission est petite devant la fréquence critique de la coque.

## RAYONNEMENT ACOUSTIQUE EXTERIEUR DE COQUES INFINIES PRESENTANT DES PETITS DEFAUTS DE CIRCULARITE

### 1. INTRODUCTION

Lorsque l'on s'intéresse au rayonnement acoustique extérieur d'une coque parfaitement cylindrique en basse fréquence, c'est à dire située bien en dessous de la fréquence critique, les modélisations numériques quelles qu'elles soient (méthodes éléments finis de frontière, méthode integro-modale) prévoient des coefficients de rayonnement acoustique très faibles, d'autant plus faibles que la coque est peu élançée et qu'elle rayonne très en deçà de sa fréquence critique  $f_c$ . Si les coefficients de rayonnement sont si faibles c'est qu'ils mettent en jeu de très importants phénomènes de court-circuit acoustique, qui comme on sait, sont particulièrement forts pour une géométrie cylindrique (on peut par exemple comparer le facteur de rayonnement d'une plaque et d'une coque et constater que le premier est beaucoup plus fort que le dernier en basse fréquence).

Dès que la coque cylindrique présente des petits défauts de circularité, du fait de sa réalisation par exemple, l'expérience montre un accroissement considérable du facteur de rayonnement (cf. [1], [2]), (typiquement 10 à 15 dB pour une coque rayonnant dans l'air à  $f/f_c$  de l'ordre de 0.1). Par ailleurs, d'autres études ont soulevé le problème d'écart importants entre les théories parfaitement cylindriques et les expériences menées sur des cylindres imparfaits. On peut citer notamment [3], [4], [5].

Le but de ce travail est de mettre en évidence numériquement l'influence de petits défauts de circularité sur le rayonnement acoustique d'une coque en basse fréquence, en utilisant une approche analytique. La complexité d'un tel problème nous contraint à étudier une coque d'extension infinie afin de s'affranchir de son comportement modal axial. Le problème tridimensionnel se ramène à un problème bi-dimensionnel dès lors que l'on prend la transformée de Fourier axiale des équations qui le régissent.

Les vibrations du cylindre sont décrites à partir d'un opérateur de coque mince de rayon variable, que l'on résoud dans le cas de "petites variations". L'acoustique externe est découpée en deux régions, dans lesquelles la pression vérifie l'équation d'Helmholtz en coordonnées cylindriques pour une région externe à un rayon constant, et une équation d'Helmholtz "modifiée" dans un milieu intermédiaire délimité par la surface de rayon parfait et celle de la coque de rayon variable. La résolution s'effectue par développement asymptotique en série de Taylor de la pression dans le milieu intermédiaire en supposant son épaisseur petite devant la longueur d'onde acoustique. Des résultats numériques en vitesse quadratique radiale de coque, puissance rayonnée et facteur de rayonnement sont présentés, qui mettent en évidence la sensibilité du rayonnement acoustique aux faibles variations de rayon envisagées.

### 2. APPROCHE THEORIQUE

#### 2.1. Aspect vibratoire.

Les équations du mouvement en régime harmonique  $e^{-j\omega t}$  d'une coque mince d'épaisseur constante  $h$ , et de rayon de courbure variant  $r(\theta)$  sont données par (Cf. [5]).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial s} + \frac{\nu \partial}{\partial x} \left( \frac{w}{r} \right) = - \frac{\omega^2}{c^2} u \quad (1)$$

RAYONNEMENT ACOUSTIQUE EXTERIEUR DE COQUES INFINIES PRESENTANT DES PETITS DEFAUTS DE CIRCULARITE

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial s} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{w}{r} \right) = - \frac{\omega^2}{c_L^2} v \quad (2)$$

$$\frac{\nu}{r} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{r^2} + \frac{h^2}{12} \Delta^2 w = \frac{\omega^2 w}{c_L^2} + \frac{F \delta(x) \delta(\theta)}{c_L^2 \rho_c h} - \frac{p(Q)}{c_L^2 \rho_c h} \quad (3)$$

où  $u, v, w$  sont les déplacements d'un point du feuillet moyen dans le repère local orthogonal (la direction  $\vec{z}$  coïncide avec  $r(\theta)$  voir figure 1)  $c_L = [E/\rho_c(1-\nu^2)]^{1/2}$  désigne la célérité des ondes longitudinales,  $E, \rho_c, \nu$  sont respectivement le module d'Young, la masse volumique et le coefficient de Poisson de la coque.  $F$  est une force ponctuelle de composante non nulle selon  $\vec{z}$ ,  $\delta$  la distribution de Dirac,  $p(Q)$  prend en compte la pression acoustique pariétale et  $\Delta^2$  désigne l'opérateur différentiel du quatrième ordre  $\partial^4/\partial x^4 + 2 \partial^4/(\partial x^2 \partial s^2) + \partial^4/\partial s^4$ ,  $ds$  est l'élément d'arc curviligne intercepté par l'angle  $d\theta$ . Ces équations résultent des hypothèses simplificatrices inhérentes aux opérateurs de coque mince qui dans le cas d'un rayon constant conduisent à l'opérateur de Donnell.

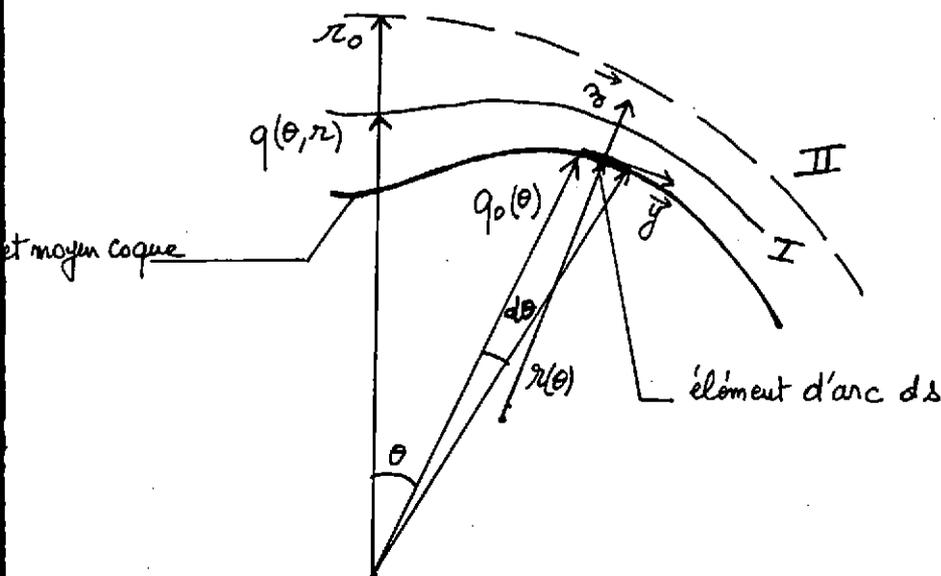


Figure 1 : Vue en coupe de la coque avec un rayon variant

RAYONNEMENT ACOUSTIQUE EXTERIEUR DE COQUES INFINIES PRESENTANT DES PETITS DEFAUTS DE CIRCULARITE

Dans un cas où la coque présente seulement des petits défauts de rayon, il est possible d'approcher l'arc ds de la manière suivante :

$$ds = q_0(\theta) d\theta \left[ 1 + \left( \frac{1}{q_0} \frac{dq_0}{d\theta} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4)$$

où  $q_0(\theta)$  définit un rayon variable de la coque pris par rapport à une origine fixe (Cf.figure 1). Tant que  $\left( \frac{1}{q_0} \frac{dq_0}{d\theta} \right)^2$  reste petit devant l'unité il est alors possible d'approcher l'arc curviligne ds par :

$$ds = q_0(\theta) d\theta \quad (5)$$

Dans la mesure où  $q_0(\theta)$  est périodique de période  $2\pi$  et où la section droite de la coque possède un plan de symétrie, on peut développer  $q_0(\theta)$  en série de Fourier :

$$q_0(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos n\theta \quad (6)$$

où les coefficients  $a_n$  sont des harmoniques qui prennent en compte les défauts de rayon, et qui doivent être "petits" pour vérifier l'approximation (4).

2.2. Aspect acoustique.

Le problème extérieur est découpé en deux régions, dans un plan de coque (voir figure (1)), une région (I) intermédiaire entre la surface de la coque non cylindrique et une surface de rayon  $r_0$  où l'on étend les variations de  $q_0(\theta)$  selon un rayon r indépendant de  $\theta$  de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} q(\theta, r) &= r + \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{a_0 - r_0} (r - r_0) \cos n\theta \end{aligned} \right. \quad (7a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_0 \leq r \leq r_0, \\ dq(\theta, r)_{\text{fixe}} \neq 0 \quad \forall \theta \end{aligned} \right. \quad (7b)$$

Une telle variation de  $q(\theta)$  avec r permet de raccorder les rayons avec ceux de la coque  $q(\theta, a_0) = q_0(\theta)$  et avec une surface de rayon  $r_0$  arbitraire constant ( $q(\theta, r_0) = r_0$ ). Encore faut-il que la condition 7b soit vérifiée, ce qui limite le choix des rayons arbitraires  $r_0$  à un ensemble de rayons suffisamment grands devant  $a_0$ .

Dans la région I de l'espace, en supposant les variations de  $q_0(\theta)$  faibles avec  $\theta$  (et a fortiori pour  $q(\theta, r)$ ), la pression acoustique vérifie :

RAYONNEMENT ACOUSTIQUE EXTERIEUR DE COQUES INFINIES PRESENTANT DES PETITS DEFAUTS DE CIRCULARITE

$$\frac{\partial^2 p}{\partial q^2} + \frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial q} + \frac{1}{q^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k^2 p = 0 \quad (8)$$

où  $k$  est le nombre d'onde acoustique et où  $\partial/\partial q$  désigne la dérivée partielle par rapport à  $q$  ( $\theta$  et  $x$  fixés),  $\partial/\partial \theta$  la dérivée partielle par rapport à  $\theta$  ( $q$  et  $x$  fixés),  $\partial/\partial x$  la dérivée partielle par rapport à  $x$  ( $q$  et  $\theta$  fixés). A partir de (7), (8) prend la forme suivante :

$$\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial r}{\partial q} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial q}\right) + \frac{1}{q} \frac{\partial r}{\partial q} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{q^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k^2 p = 0 \quad (9)$$

où  $\frac{\partial q}{\partial r}$  à  $\theta$  fixé prend la forme suivante :

$$\frac{\partial q}{\partial r} = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{a_0 r_0} \cos n\theta \quad (10)$$

Dans la région II externe à  $r_0$ , la pression vérifie l'équation d'Helmholtz en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k^2 p = 0 \quad (11)$$

3. RESOLUTION DU PROBLEME COUPLE

Dans la mesure où le système est d'extension infinie dans la direction  $\bar{x}$  (et qu'il demeure périodique selon  $\theta$ ) il admet pour solution des déplacements vibratoires de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} u(x, \theta) \\ v(x, \theta) \\ w(x, \theta) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^N \begin{pmatrix} D_n(k_x) \cos n\theta \\ E_n(k_x) \sin n\theta \\ F_n(k_x) \cos n\theta \end{pmatrix} e^{j k_x x} dk_x \quad (12)$$

où  $k_x$  représente la variable de Fourier et  $N_1$  l'ordre de la troncature sur la série circconférentielle. La pression dans la région II vérifie (11) et prend la forme suivante :

RAYONNEMENT ACOUSTIQUE EXTERIEUR DE COQUES INFINIES PRESENTANT DES PETITS DEFAUTS DE CIRCULARITE

$$P_{II}(x,r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^N A_n(k_x) H_n(k_r r) e^{jk_x x \cos n\theta} dk_x \quad (13)$$

$$r \geq r_0$$

où  $k_r = (k^2 - k_x^2)^{1/2}$ , et  $H_n$  est la fonction de Hankel de 1ère espèce. La pression dans la région I vérifie (9) qui n'admet pas de solution classique. Sa solution est cherchée sous la forme asymptotique suivante :

$$P_I(x,r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{s=0}^S \frac{\epsilon^s}{s!} P_n^s \cos n\theta e^{jk_x x} dk_x \quad (14)$$

$$(a_0 - r_0) \leq \epsilon \leq 0$$

où  $\epsilon = r - r_0$  est un écart de rayon qui doit rester petit devant la longueur d'onde acoustique.  $S$  est l'ordre de la troncature du développement asymptotique qui doit être pris égal ou supérieur à 2 pour vérifier (9) au moins en puissance de  $\epsilon^0$ . En remarquant que  $\partial/\partial r$  est équivalent à  $\partial/\partial \epsilon$  il est alors possible d'écrire les équations du problème acoustique, dans la région I en puissance de  $\epsilon^S$ . Les résultats présentés ont issus d'une troncature en  $S = 2$  ce qui fournit pour chaque ordre circonférentiel  $n$  un vecteur d'état intégrant les inconnues suivantes :

$$\vec{V}_n^T = (D_n(k_x), E_n(k_x), F_n(k_x), P_n^0(k_x), P_n^1(k_x), P_n^2(k_x)) \quad (15)$$

La matrice du système linéaire résultant est une matrice pleine non symétrique de taille  $6 N_1$ , ce qui traduit un couplage des ordres circonférentiels  $n$  puisque le problème traité n'est pas axisymétrique. Pour chaque ordre circonférentiel les six équations sont fournies par les trois équations du mouvement de la coque (1), (2), (3) lorsque l'on a fait usage des relations (5) et (6), d'une quatrième équation (9) lorsque l'on s'est servi de (10), et de deux équations de continuité des vitesses aux interfaces coque et milieu I ( $\epsilon = a_0 - r_0$ ), milieu I et milieu II ( $\epsilon = 0$ ) (les continuités des pressions sont prises en compte implicitement). Cette matrice est à calculer pour des valeurs de la variable de Fourier  $k_x$  judicieusement choisies afin de procéder aux inversions définies en (12), (13), (14).

4. RESULTATS NUMERIQUES TYPIQUES EN FLUIDE LOURD.

Nous présentons un résultat de rayonnement dans l'eau  $\rho_0 = 1000 \text{ Kg/m}^3$ ,  $c = 1500 \text{ m/s}$  pour une coque en acier d'épaisseur 3 mm ce qui situe sa fréquence critique au voisinage de 78 kHz. On compare la puissance rayonnée, la vitesse quadratique radiale et le facteur de rayonnement en dB d'une coque purement cylindrique de rayon 0,4 m et d'une coque de rayon faiblement variable de défaut d'ordre 2 ( $a_2 = 10^{-2} \text{ m}$ ) et de rayon moyen  $a_0 = 0,4 \text{ m}$ , soit

RAYONNEMENT ACOUSTIQUE EXTERIEUR DE COQUES INFINIES PRESENTANT DES PETITS DEFATS DE CIRCULARITE

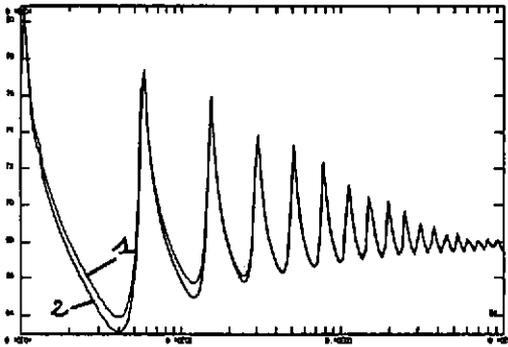


FIGURE 2 : Vitesse quadratique radiale. 1: circulaire ; 2: défectueux

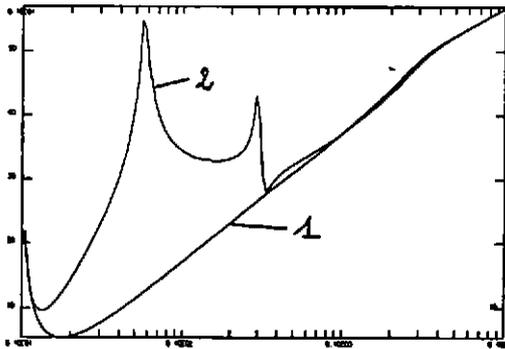


FIGURE 3 : Puissance rayonnée. 1: circulaire ; 2: défectueux

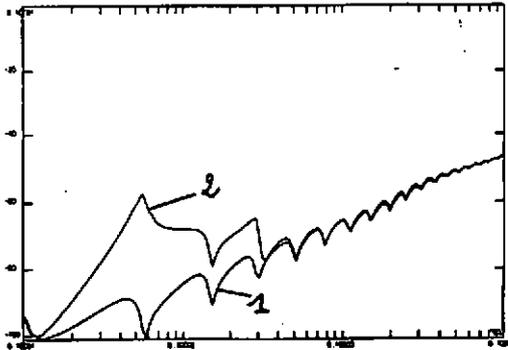


FIGURE 4 : Facteur de rayonnement. 1: circulaire ; 2: défectueux

### RAYONNEMENT ACOUSTIQUE EXTERIEUR DE COQUES INFINIES PRESENTANT DES PETITS DEFAUTS DE CIRCULARITE

un défaut relatif  $a_2/a_0$  valant 2,5%. L'ordre de la troncature  $N_1$  est fixé à 18. On constate que la vitesse de la coque parfaitement cylindrique en réponse à une excitation ponctuelle et celle de la coque avec défaut de rayon, sont tout à fait comparables (figure 2). Par contre, des pics de puissance acoustique rayonnée apparaissent dans le spectre (figure 3) qui correspondent à une nette augmentation du facteur de rayonnement sur les premiers ordres circonférentiels, notamment  $n = 2, 3$  et 4 (figure 4).

#### 5. CONCLUSION.

Cet article a présenté la modélisation du rayonnement acoustique de coques présentant des petits défauts de circularité. Tant que les défauts restent petits devant le rayon moyen, il est possible de déterminer les vibrations d'une coque d'extension infinie à partir d'une approximation sur la valeur de l'arc curviligne. L'acoustique extérieure est résolue en découpant le milieu en deux régions : une où la géométrie est cylindrique séparable, une autre pour laquelle la pression vérifie une équation d'Helmholtz intégrant les variations de rayon. Les premiers résultats numériques confirment la grande sensibilité du rayonnement acoustique basse fréquence aux défauts de circularité qui se traduit par l'apparition de pics de puissance rayonnée pour les coques défectueuses et une augmentation du coefficient de rayonnement alors que la vitesse de coque est peu affectée par les défauts de rayon.

#### BIBLIOGRAPHIE

- 11 | B. LAULAGNET - Rayonnement acoustique des coques cylindriques, finies raidies, revêtues d'un matériau de masquage. Thèse Sciences INSA LYON n° 89 ISAL 0035 - 1989, 194p.
- 12 | B. LAULAGNET - J.L. GUYADER - Rayonnement acoustique de coques cylindriques finies munies de raidisseurs circonférentiels et d'un matériau de masquage. Rapport de synthèse du contrat DRET n° 87 242 - Décembre 1989.
- 13 | A. CUMMINGS - I.J. CHANG - R.J. ASTLEY - sound transmission at low frequencies through the walls of distorted circular ducts. *Journal of Sound and Vibration* 1984 97(2) 261-286.
- 14 | S.N. YOURSI - F.J. FAHY - Distorted cylindrical shell response to internal acoustic excitation below the cut-off frequency. *JSV* 1977 52(3) 441-552.
- 15 | M. HECKL - V. RAMAMURTI - Schalldämmung von rohren mit elliptischen querschnitt. *Acustica* vol 43 1979.
- 16 | A.W. LEISSA - Vibration of shells. NASA SP 288 1973 Washington DC.