

DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR DES TUBES LIMITÉS PAR DES COQUES HÉMISPÉRIQUES

D. Décultot, F. Lecroq, G. Maze & J. Ripoché

Laboratoire d'Acoustique Ultrasonore et d'Électronique, U.R.A. C.N.R.S. 1373, Université du Havre, Place Robert Schuman, 76610 Le Havre, France.

1. INTRODUCTION

L'étude de la diffusion acoustique par des cylindres de longueur infinie a fait l'objet de nombreux travaux théoriques et expérimentaux [1-3]. Ces travaux ont montré l'influence de la propagation des ondes de surface sur la diffusion acoustique [1, 4]. Pour les objets de forme cylindrique plongés dans l'eau, plusieurs types d'ondes de surface sont mis en évidence suivant la direction de l'excitation ultrasonore. Dans le cas d'une excitation ultrasonore normale à l'axe, deux types d'ondes circonférentielles sont distingués suivant leur support principal de propagation, d'une part, les ondes internes (l'onde de Rayleigh $l = 1$ et les ondes de galerie à écho $l = 2, 3, \dots$) dont la propagation se fait principalement dans le solide et, d'autre part, l'onde externe de Scholte-Stoneley dont la propagation s'effectue principalement à l'interface eau-coque [5]. Pour certaines fréquences, ces ondes peuvent constituer des résonances autour des objets étudiés. Dans le cas d'une excitation oblique, les ondes guidées ($p = 1, 2, \dots$) sont également à l'origine de la formation de résonances [6]. Pour les objets de forme sphérique, les ondes constituant les résonances sont classées comme pour le cylindre en ondes internes de surface (ondes de Rayleigh et de Galerie à Écho) et externes (onde de Scholte-Stoneley) [7]. Pour les coques suffisamment fines, le comportement de ces ondes est à rapprocher de celui des ondes de plaque. Ces dernières sont de type symétrique ou antisymétrique suivant la nature de la vibration de la plaque. Les objets que nous étudions dans ce travail sont des objets constitués d'un tube limité par deux coques hémisphériques. La direction d'excitation envisagée est parallèle au grand axe des objets (excitation axiale). L'approche retenue pour interpréter les résultats expérimentaux repose sur l'écriture de l'accord de phase dans le plan méridien des objets (condition de stationnarité) [8]. L'application de cette condition nécessite de connaître les vitesses de phase des ondes se propageant dans chacune des parties constituant l'objet. La détermination des vitesses de phase des ondes se propageant sur des objets de forme sphérique et cylindrique est effectuée à partir d'un calcul de modes propres. Bien que les résultats expérimentaux soient obtenus pour des objets insonés par des ultrasons dans l'eau, ces résultats sont comparés aux calculs faits dans le vide. Le couplage faible eau/matériau n'entraîne pas de translation significative des positions en fréquence des résonances. Seules ces fréquences sont utilisées pour déterminer les vitesses de phase. Cependant le calcul des modes propres dans le vide ne fait pas apparaître les résonances dues à l'onde de Scholte-Stoneley. Celles-ci peuvent être mises en évidence par un calcul fait en diffusion acoustique. Dans une première partie, les vitesses de phase des ondes se propageant dans la longueur des tubes (ondes axiales) sont calculées à partir de l'étude du mode de vibration particulier $n = 0$ [9, 10]. Les résultats de ces calculs sont comparés aux résultats expérimentaux obtenus lors de l'excitation axiale des tubes à extrémités libres. Puis les vitesses de phase des ondes se propageant sur les coques sphériques déduites des expériences sont comparées aux calculs. Dans la dernière partie, les résultats expérimentaux obtenus lors de l'excitation axiale des tubes limités par deux hémisphères (ou coques hémisphériques) sont interprétés. Tous les objets étudiés dans ce travail sont en acier inoxydable avec un rayon externe a égal à 27 mm et un rapport des rayons b/a égal à 0,94 (b est le rayon interne).

2. EXCITATION AXIALE DU TUBE

2.1 Calcul de la vitesse de phase des ondes axiales

Le vecteur déplacement \vec{u} est défini à partir d'un potentiel scalaire ϕ et d'un potentiel vecteur $\vec{\psi}$. Le calcul des modes élastiques de propagation dans un cylindre s'obtient par la résolution des équations de Helmholtz. Pour le

DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR DES TUBES LIMITÉS PAR DES COQUES HÉMISPHERIQUES

mode $n = 0$, toutes les composantes radiales du vecteur déplacement sont identiques sur la circonférence de l'objet. Ce mode $n = 0$ traduit une propagation axiale des ondes. En tenant compte du mode particulier $n = 0$, de nouvelles expressions du potentiel scalaire ϕ et du potentiel vecteur $\vec{\psi}$ sont données ci-dessous (1). Le potentiel vecteur ne possède qu'une composante non nulle ψ_θ .

$$\begin{aligned} \phi &= [A_1 U_0(hr) + A_2 V_0(hr)] \exp[j(k_z z - \omega t)]; \\ \psi_\theta &= [-B_1 U_1(Kr) - B_2 V_1(Kr)] \exp[j(k_z z - \omega t)]; \end{aligned} \quad (1)$$

où $h^2 = \frac{\omega^2}{C_L^2} - k_z^2$ et $K^2 = \frac{\omega^2}{C_T^2} - k_z^2$; k_z est la composante du vecteur d'onde dans la direction de l'axe du tube et ω

la pulsation de l'onde. $U_n, U_{n+1}, V_n, V_{n+1}$ sont les fonctions de Bessel de première espèce (J_n) et de seconde espèce (N_n), ou les fonctions de Bessel modifiées de première espèce (I_n) et de seconde espèce (K_n) d'ordre n et $n+1$, suivant le signe de h^2 et K^2 (cf. tableau). A_1, A_2, B_1, B_2 sont quatre inconnues. Les conditions aux frontières utilisées pour le tube (T_{rr} et $T_{rz} = 0$) doivent être exprimées successivement pour $r = a$ puis $r = b$. Un système de quatre équations à quatre inconnues est ainsi constitué:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{14} & M_{15} \\ M_{31} & M_{32} & M_{34} & M_{35} \\ M_{41} & M_{42} & M_{44} & M_{45} \\ M_{61} & M_{62} & M_{64} & M_{65} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (2)$$

Les termes du déterminant sont donnés en annexe. Ce problème a une solution si le déterminant de la matrice est

égal à zéro. Pour une fréquence réduite $k_1 a \left(k_1 a = \frac{\omega a}{C_l} \right)$ donnée, nous recherchons les valeurs de $C_z \left(C_z = \frac{\omega}{k_z} \right)$ qui annulent le déterminant du système (2). Les courbes de dispersion, correspondant à un tube d'acier inoxydable ayant un rapport des rayons b/a de 0,94, sont tracées sur la figure 1 ($C_T = 3\,100$ m/s et $C_L = 5\,790$ m/s). Une

première courbe, notée S_0^{tube} , pour des fréquences voisines de zéro, une vitesse égale à 4 995 m/s. Cette vitesse correspond à la vitesse de barre C_b déterminée avec la relation (3). Pour des fréquences croissantes, cette même courbe décroît au-dessous de la vitesse de l'onde dans l'eau C_l (1 470 m/s) puis croît progressivement vers une vitesse de 2 875 m/s. La valeur de cette vitesse correspond à la vitesse de l'onde de Rayleigh sur un plan semi-

infini C_R . Elle est calculée avec la formule approchée (4). La courbe, notée S_0^{tube} , possède une fréquence réduite de coupure égale à 4. Lorsque les fréquences croissent, cette courbe présente un premier palier à une vitesse de 5 236 m/s qui correspond à la vitesse de plaque C_p . Cette vitesse C_p est la vitesse limite pour de faibles fréquences du premier mode longitudinal pour les plaques. Elle est donnée par la relation (5) où le module de Poisson ν est défini en fonction des vitesses C_T et C_L dans la relation (6).

DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR DES TUBES LIMITÉS PAR DES COQUES HÉMISPÉRIQUES

$$C_b = C_T \sqrt{2(1+v)} \quad (3); \quad C_R = \left[\frac{(0,87+1,12v)}{(1+v)} \right] C_T \quad (4); \quad C_p = C_T \sqrt{\frac{2}{1-v}} \quad (5) \quad \text{avec } v = \frac{(C_L^2 - 2C_T^2)}{2(C_L^2 - C_T^2)} \quad (6)$$

Cette courbe S_0^{tube} tend vers la vitesse de l'onde de Rayleigh C_R pour des fréquences élevées. Les courbes, notées respectivement A_1^{tube} , S_1^{tube} possèdent des fréquences réduites de coupure (respectivement $k_{1a} = 110,5$ et 206) en basses fréquences puis tendent vers la vitesse C_T pour des fréquences élevées. Pour obtenir les fréquences de coupure, l'étude est faite en faisant tendre k_z vers 0. Dans ce cas, le déterminant du système (2) peut se mettre sous la forme:

$$D = D_1 \cdot D_2 \quad \text{avec} \quad D_1 = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{14} \\ M_{41} & M_{44} \end{vmatrix}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} M_{32} & M_{35} \\ M_{62} & M_{65} \end{vmatrix} \quad (7)$$

L'annulation des déterminants $|D_1|$ et $|D_2|$ donne les fréquences de coupure. L'annulation du déterminant $|D_1|$ correspond aux ondes de galerie à écho et l'annulation du déterminant $|D_2|$ correspond à des ondes de type guidé. Le type de chaque onde est reporté sur la figure 1. Les modes $n = 0$ traduisent une propagation axiale des ondes. Elles sont désignées ondes axiales ou longitudinales [11].

1.2 Vérification expérimentale des vitesses de phase des ondes axiales

Les résultats expérimentaux sont obtenus avec la Méthode d'Isolément et d'Identification des Résonances (M.I.I.R.) [12]. Cette méthode permet d'obtenir un spectre des résonances en mesurant l'amplitude dans la partie libre du signal réémis par l'objet. Le tube de longueur $L = 100$ mm est fermé par du latex afin de laisser libre ses extrémités tout en maintenant de l'air à l'intérieur de celui-ci. Les résultats présentés dans ce paragraphe sont obtenus en excitant un tube sur une de ses extrémités. Dans ces conditions d'excitation, les ondes se propagent dans la longueur du tube. Pour certaines fréquences particulières de l'onde incidente, ces ondes axiales constituent un état stationnaire de vibration dans la longueur du tube; une résonance peut alors être détectée. Cet état stationnaire est caractérisé par la présence d'un nombre entier m de demi-longueurs d'onde dans la longueur du tube. La condition pour qu'un effet stationnaire se produise est donnée par la relation (8).

$$C_{cyl} = \frac{LC_j(k_{ja})^*}{m\pi a} \quad \text{avec } m = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

$(k_{ja})^*$ est la fréquence réduite de résonance, C_{cyl} la vitesse de phase de l'onde axiale. C_j est la vitesse de l'onde de volume dans l'eau. Un premier spectre est donné sur la figure 2, il est obtenu avec un transducteur de fréquence centrale de 200 kHz. Ce spectre fait apparaître des résonances dont les fréquences correspondent à un nombre entier m de 6 à 13. Le spectre de la figure 3 est obtenu pour le même tube mais avec un transducteur de 500 kHz de fréquence centrale. Les modes de vibration m allant de 14 à 24 sont associés aux résonances. Pour ces deux spectres, les valeurs de C_{cyl} calculées à partir de la relation (8) et des fréquences de résonances expérimentales

correspondent aux vitesses de phase de l'onde S_0^{tube} . L'erreur entre la vitesse de phase calculée au paragraphe 1.1 et celle déduite des expériences ne dépasse pas 1% sur l'ensemble des résultats. Dans la fenêtre de fréquence étudiée aucune résonance due à l'onde A_0^{tube} n'est observée.

DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR DES TUBES LIMITÉS PAR DES COQUES HÉMISPHERIQUES

3 COQUES SPHERIQUES

La détermination de la vitesse de phase des ondes se propageant sur une coque sphérique C_{sph} s'effectue à partir de la relation (9) en supposant n entier pour une résonance.

$$C_{sph} = C_l \frac{(k_l a)^*}{n + \frac{1}{2}} \quad (9)$$

où $(k_l a)^*$ est la fréquence réduite de résonance. Le terme $1/2$ traduit le fait que toutes les ondes de surface passent par deux points focaux qui se trouvent de part et d'autre du diamètre parallèle à la direction de l'onde incidente. Un saut de phase de $\pi/2$ se manifeste à chaque passage des ondes par un point focal. Les courbes de dispersion de vitesse d'une coque sphérique sont tracées sur la figure 4 en utilisant la relation (9) dans laquelle la fréquence

réduite est celle calculée à partir des modes propres. La courbe notée S_0^{sph} correspond à l'onde Symétrique de Lamb et la courbe notée A_0^{sph} à l'onde Antisymétrique de Lamb des plaques. Un second calcul fait en diffusion

acoustique confirme ces deux courbes et fait apparaître l'existence d'une troisième courbe notée A_S^{sph} qui correspond à une onde de Scholte-Stoneley. L'étude expérimentale menée sur une coque sphérique en acier inoxydable a permis d'obtenir le spectre de résonances de la figure 5. La plupart des résonances observées sur ce spectre sont identifiées à l'aide de la M.I.R. utilisée en bistatique. Ainsi les modes de vibration n allant de 4 à 7

dus à l'onde circonférentielle de galerie à écho $l = 2$ (correspondant à l'onde S_0^{sph}) sont identifiés. De même, les modes 13, 14 et 15 dus à l'onde de Scholte-Stoneley sont également identifiés. A partir de la fréquence de ces résonances et en utilisant la relation (9) les vitesses de phase calculées sont reportées sur les courbes de dispersion de vitesses de la figure 4. Il y a un bon accord entre les vitesses calculées et celles déduites des expériences.

4 EXCITATION AXIALE DU TUBE LIMITÉ PAR DEUX COQUES HÉMISPHERIQUES

4.1 Formation des résonances

Lorsque l'excitation acoustique est parallèle au grand axe des objets constitués d'un tube limité par des coques hémisphériques, des résonances sont observées. Celles-ci sont dues à des ondes qui, pour certaines fréquences, constituent des ondes stationnaires sur la circonférence méridienne (ou grande circonférence) des objets. La formation des résonances déduite de l'accord de phase est exprimée par la relation (10):

$$\int \frac{dl}{\lambda_l} = N + \frac{1}{2} \quad (10)$$

où dl est un élément de longueur infiniment petit de la grande circonférence de l'objet, λ_l est la longueur d'onde de la $l^{\text{ième}}$ onde de surface et N le mode de vibration dans le plan méridien de l'objet. Comme pour la sphère seule, lorsque les ondes de surface passent par l'un des deux points focaux, un saut de phase correspondant à $1/4$ de longueur d'onde est à prendre en compte. Compte tenu de la forme des objets étudiés, la grande circonférence prise dans le plan méridien est égale à deux longueurs de la partie cylindrique ($2(L-2a)$) plus l'équivalent de la

DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR DES TUBES LIMITÉS PAR DES COQUES HÉMISPHERIQUES

circonférence d'une sphère ($2\pi a$). Pour chaque partie de ces objets une vitesse de phase différente doit être retenue: C_{cyl} pour la partie cylindrique et C_{sph} pour les 2 parties hémisphériques. La relation (10) s'écrit alors:

$$\left[\frac{2(L-2a)}{C_{cyl}} + \frac{2\pi a}{C_{sph}} \right] f = N + \frac{1}{2} \quad (11)$$

Les valeurs des vitesses de phase C_{cyl} et C_{sph} sont fonctions de la fréquence. C_{cyl} peut être déterminée à partir de la figure 1 (déduite de l'étude du mode $n = 0$ du tube). C_{sph} est obtenue sur la figure 4 (déduite de l'étude des objets de forme sphérique).

4.2 Étude expérimentale

L'étude expérimentale présentée ici concerne un objet ayant un rapport $L/2a = 2$. L'expérience est effectuée avec la M.I.R. [12]. L'excitation est effectuée sur une des extrémités hémisphériques de l'objet, dans une direction parallèle au grand axe de l'objet. Le spectre de la figure 6 fait apparaître des résonances. Un mode de vibration N dans le plan méridien de l'objet est associé à la plupart des résonances observées. Ainsi les modes N allant de 6 à 15 sont associés à des résonances en prenant pour chaque fréquence expérimentale d'une part, la vitesse de phase

de l'onde S_0^{ube} pour C_{cyl} et, d'autre part, la vitesse de phase de l'onde S_0^{sph} pour C_{sph} . Dans les cas les plus défavorables, l'erreur entre les fréquences expérimentales et les fréquences calculées est de 3%.

5 CONCLUSION

L'application de la condition de stationnarité dans le plan méridien des objets constitués d'un tube limité par deux coques hémisphériques permet l'interprétation des résonances observées lors d'une excitation axiale. Ceci est possible en étudiant au préalable les vitesses de phase des ondes se propageant, d'une part, sur les parties hémisphériques et, d'autre part, dans la longueur du tube. Expérimentalement, seules les résonances dues à l'onde

S_0^{ube} sont observées pour le tube excité axialement. Pour la coque sphérique, des résonances dues à l'onde S_0^{sph} et à l'onde de Scholte-Stoneley sont mises en évidence. Lors de l'excitation axiale du tube limité par deux coques hémisphériques, l'onde S_0^{ube} associée à l'onde S_0^{sph} permet l'interprétation des résonances observées.

6 BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. ÜBERALL, L.R. DRAGONETTE, L. FLAX, "Relation between creeping waves and normal modes of vibration of curved body", *J. Acoust. Soc. Am.* 61, 711-715, [1977].
- [2] J.D. MURPHY, E.D. BREITENBACH, H. ÜBERALL, "Resonance scattering of acoustic waves from cylindrical shells", *J. Acoust. Soc. Am.* 64, 677-683, [1978].
- [3] G. MAZE, J. RIPOCHE, A. DEREM, J.-L. ROUSSELOT, "Diffusion d'une onde ultrasonore par des tubes remplis d'air immergés dans l'eau", *Acustica* 55, 69-85, [1984].
- [4] A. DEREM, "Relation entre la formation des ondes de surface et l'apparition des résonances dans la diffusion acoustique", *Revue du CETHEDC* 58, 43-79, [1979].
- [5] M. TALMANT, J.-L. IZBICKI, G. MAZE, G. QUENTIN, J. RIPOCHE, "External wave resonances on thin cylindrical shells", *J. Acoustique* 4, 509-523, [1991].
- [6] J.-L. IZBICKI, G. MAZE, J. RIPOCHE, "Influence of the free modes of vibration on the acoustic scattering of circular shells", *J. Acoust. Soc. Am.* 80, 1215-1219, [1986].

DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR DES TUBES LIMITÉS PAR DES COQUES HÉMISPHÉRIQUES

- [7] G.C. GAUNAURD, M.F. WERBY, "Sound scattering by resonantly excited, fluid-loaded, elastic spherical shells", J. Acoust. Soc. Am. 90, 2536-2550, [1991].
- [8] H. ÜBERALL, Y.J. STOYANOV, A. NAGL, M.F. WERBY, S.H. BROWN, J.W. DICKEY, S.K. NUMRICH, J.M. d'ARCHANGELO, "Resonance spectra of elongated elastic objects", J. Acoust. Soc. Am. 81, 312-316, [1987].
- [9] D. DÉCULTOT, F. LECROQ, G. MAZE, J. RIPOCHE, "Diffusion acoustique par un tube fermé par deux coques hémisphériques", Deuxième Congrès Français d'Acoustique, Arcachon, 14-17 avril 1992, Journal de Physique IV, 2, C1, 1091-1094, [1992].
- [10] D. DÉCULTOT, F. LECROQ, G. MAZE, J. RIPOCHE, "Acoustic scattering from a cylindrical shell bounded by hemispherical endcaps. Resonance interpretation with surface waves propagating in cylindrical and spherical shells", J. Acoust. Soc. Am., (soumis)
- [11] T. R. MEEKER, A. H. MEITZLER, "Guided wave propagation in elongated cylinders and plates", Physical Acoustics 1A, 111-167, [1973].
- [12] G. MAZE, J. RIPOCHE, "Méthode d'Isolément et d'Identification des Résonances (MIIR) de cylindres et de tubes soumis à une onde acoustique plane dans l'eau", Rev. Phys. Appl. 18, 319-326, [1983].

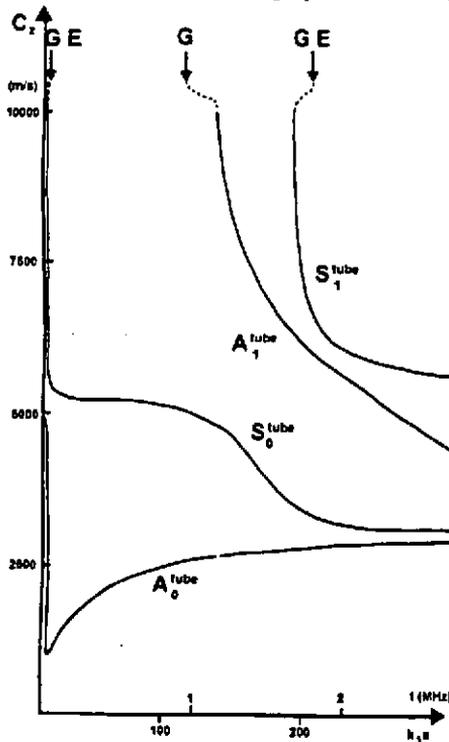


Figure 1: Courbes de vitesse de phase des ondes axiales d'un tube d'acier inoxydable de rapport $b/a = 0,94$; courbes calculées pour le mode $n = 0$ (GE: onde de galerie à écho, G: onde guidée)

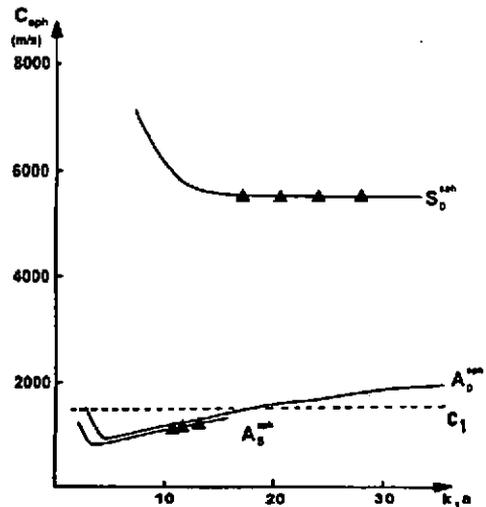


Figure 4: Courbes de dispersion d'une coque sphérique en acier inoxydable de rapport b/a de 0,94 et de rayon $a = 27$ mm, en trait continu les résultats calculés, \blacktriangle points expérimentaux.

DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR DES TUBES LIMITÉS PAR DES COQUES HÉMISPHÉRIQUES

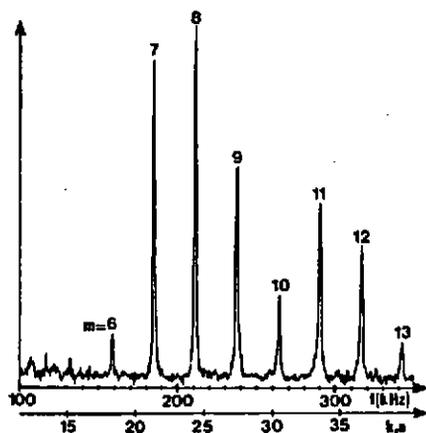


Figure 2: Spectre des résonances obtenu lors de l'excitation axiale du tube en acier inoxydable de rapport b/a de 0,94, de rayon $a = 27$ mm et de longueur $L = 100$ mm relevé avec un transducteur de fréquence centrale 200 kHz.

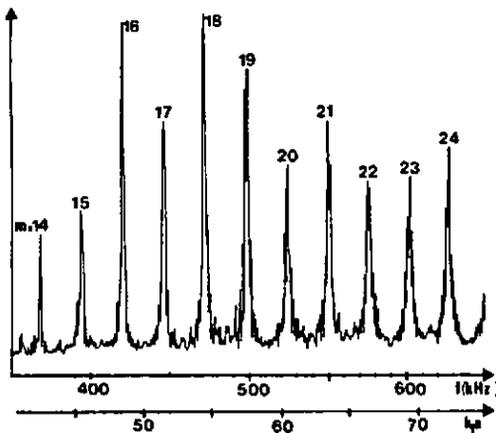


Figure 3: Spectre des résonances obtenu lors de l'excitation axiale du tube en acier inoxydable de rapport b/a de 0,94, de rayon $a = 27$ mm et de longueur $L = 100$ mm relevé avec un transducteur de fréquence centrale 500 kHz.

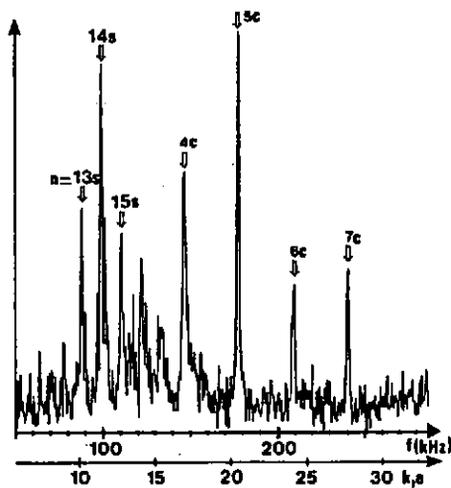


Figure 5: Spectre des résonances obtenu sur une coque sphérique en acier inoxydable de rapport b/a de 0,94 et de rayon $a = 27$ mm, (n_c : $n^{\text{ième}}$ résonance liée à l'onde circonférentielle de Galerie à Écho $l = 2$; n_s : $n^{\text{ième}}$ résonance due à l'onde de Scholte-Stoney)

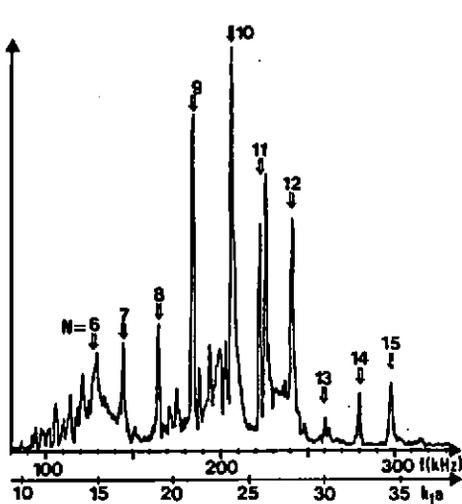


Figure 6: Spectre des résonances obtenu lors de l'excitation axiale du tube fermé par deux coques hémisphériques en acier inoxydable de rayon $a = 27$ mm, de rapport $b/a = 0,94$ et de rapport $L/2a = 2$.

DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR DES TUBES LIMITÉS PAR DES COQUES HÉMISPHÉRIQUES

Tableau: Définition des fonctions de Bessel et des coefficients δ et γ suivant la valeur de k_z

	$k_z < \frac{\omega}{C_L}$	$\frac{\omega}{C_L} < k_z < \frac{\omega}{C_T}$	$\frac{\omega}{C_T} < k_z$
h	$\sqrt{\frac{\omega^2}{C_L^2} - k_z^2}$	$\sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{C_L^2}}$	$\sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{C_L^2}}$
K	$\sqrt{\frac{\omega^2}{C_T^2} - k_z^2}$	$\sqrt{\frac{\omega^2}{C_T^2} - k_z^2}$	$\sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{C_T^2}}$
$U_n(ha)$	$J_n(ha)$	$I_n(ha)$	$I_n(ha)$
$V_n(ha)$	$N_n(ha)$	$K_n(ha)$	$K_n(ha)$
$U_n(Ka)$	$J_n(Ka)$	$J_n(Ka)$	$I_n(Ka)$
$V_n(Ka)$	$N_n(Ka)$	$N_n(Ka)$	$K_n(Ka)$
δ	+1	-1	-1
γ	+1	+1	-1

ANNEXE: Termes du déterminant (2):

$$M_{11} = \left[k_z^2 a^2 - \gamma K^2 a^2 \right] U_0(ha) + \delta 2 ha U_1(ha);$$

$$M_{12} = 2 k_z a [Ka U_0(Ka) - U_1(Ka)];$$

$$M_{14} = \left[k_z^2 a^2 - \gamma K^2 a^2 \right] V_0(ha) + 2 ha V_1(ha);$$

$$M_{15} = \gamma 2 k_z a Ka V_0(Ka) - 2 k_z a V_1(Ka);$$

$$M_{31} = -\delta 2 ha k_z a U_1(ha);$$

$$M_{32} = \left(k_z^2 a^2 - \gamma K^2 a^2 \right) U_1(Ka);$$

$$M_{34} = -2 ha k_z a V_1(ha);$$

$$M_{35} = \left(k_z^2 a^2 - \gamma K^2 a^2 \right) V_1(Ka).$$

Les huit autres termes sont obtenus en remplaçant a par b . Les coefficients δ et γ sont définis dans le tableau.