

J.L. GUYADER

Laboratoire Vibrations-Acoustique
INSA LYON - LVA 303 - 69621 VILLEURBANNE FRANCE

1. INTRODUCTION

Le rayonnement des structures est un phénomène complexe qui résulte du couplage d'éléments mécaniques et acoustiques (cavités ou milieu extérieur). Ce genre de problème présente une très grande difficulté de résolution, et a fait l'objet d'un effort de recherche considérable.

L'étude de la bibliographie sur le sujet amène à distinguer trois domaines de fréquences : les basses fréquences (BF), les hautes fréquences (HF), enfin les moyennes fréquences (MF). Cette notion de découplage fréquentiel est relative, dépend du problème traité et du point de vue suivant lequel on l'observe. Les basses fréquences se définissent par le domaine ou le comportement vibroacoustique est modal, le spectre des réponses fait apparaître des résonances bien séparées, la prévision peut alors être effectuée grâce aux méthodes de discrétisation fine de type éléments finis ou/et éléments finis de frontière, bien sur, le coût informatique est élevé, et une limitation de l'emploi de ces méthodes apparaît quand la fréquence augmente. On peut alors prolonger les résultats en introduisant des modèles simplifiés, qui ne conserveront que les éléments principaux du modèle (plaques, coques cylindriques, etc...), et posséderont, au moins en partie, des solutions analytiques permettant d'alléger les calculs.

Une première voie pour atteindre les moyennes fréquences et donc de forcer les méthodes BF. Il existera de toute façon une limite en fréquence où toutes les méthodes visant au calcul de la solution exacte seront inadaptées et/ou des techniques de prévisions simplifiées devront être utilisées. Le domaine des hautes fréquences doit être abordé de cette manière. Il autorise bien les approches simplifiées car les conditions aux limites ne jouent quasiment plus aucun rôle et que les comportements fréquentiels sont très lissés. L'utilisation de milieux infinis est alors suffisant pour décrire les phénomènes, c'est aussi la zone où les notions de moyennes énergétiques et statistiques donnent des résultats intéressants, compte-tenu des grandes densités modales en jeu. La méthode S.E.A. ([1] - [4]) en est la plus célèbre illustration, elle nécessite une division en sous systèmes de l'assemblage et pose ainsi le problème du "bon découpage", elle prédit l'énergie vibratoire des sous systèmes excités en large bande. Elle a été appliquée avec succès, mais possède l'inconvénient d'une description très globale des problèmes puisque seule l'énergie des sous systèmes est atteinte.

La zone fréquentielle intermédiaire est par définition celle des moyennes fréquences, on peut la définir comme une zone de comportement fortement multi modal, mais où les conditions aux limites jouent un rôle important. Dans cette zone, les champs vibratoires ne présentent pas un caractère diffus et sont sensibles aux modifications structurelles.

Les méthodes de prévision issues des hautes fréquences ne répondent pas au problème posé, car elles sont globalisantes, celles provenant des basses fréquences, sont elles trop attachées à la description locale.

La prévision aux moyennes fréquences passe donc par l'élaboration de méthodes semi-globalisantes qui soient aptes à conserver l'information principale. Il existe plusieurs voies en cours d'exploration compte-tenu de l'enjeu du problème posé, et des applications potentielles en aéronautique, dans le secteur automobile, etc...

Nous en détaillerons deux, sur lesquelles nous avons été amenés à travailler ; l'utilisation du concept de "température vibratoire", et la méthode d'échantillonnage modal, qui nous paraissent toutes deux prometteuses. Soulignons cependant une voie supplémentaire qui consiste à une reformulation de la S.E.A. de façon à introduire un aspect plus local de la prévision [5].

Un deuxième aspect est typique des moyennes fréquences, c'est la difficulté de connaître les caractéristiques des systèmes. On aboutit ainsi à la notion de flou structural où à celle de milieu imparfaitement caractérisés, les vibrations sont alors décrites en terme de bornes énergétiques, ou de répartition statistique. Ces aspects seront examinés en fin d'exposé.

2. UTILISATION DE STRUCTURES SIMPLIFIEES

Prenons pour fixer les idées, une structure très compliquée de type sous-marins. Une modélisation fine du problème constituerait une tâche gigantesque, et sa résolution parviendrait vite à bloquer les plus gros ordinateurs. Il est donc préférable, d'utiliser une structure simplifiée. Le modèle de coque cylindrique est à première vue une approximation réaliste, il faut cependant garder un regard critique sur les résultats obtenus car une très grande pureté du modèle accentue quelquefois à l'excès les tendances. Pour en donner une démonstration, nous présentons sur la figure 1, la puissance rayonnée par un cylindre parfait et munis de défauts structurels de type masselottes ajoutées (cf. [6]). On constate des variations importantes se traduisant par la disparition de pics de rayonnement quand la structure est parfaite. Ceci s'explique par la symétrie de la coque sans défaut, qui engendre un très fort court-circuit acoustique sur certain modes.

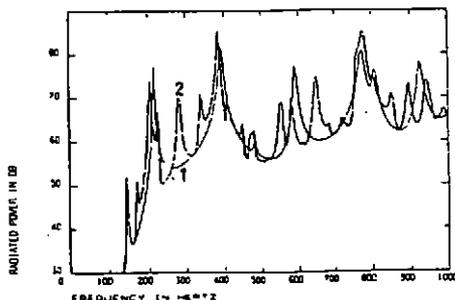


FIGURE 1 : Puissance acoustique rayonnée par une coque nue (1) et pourvue de défauts ponctuels de masses (3% de la masse totale). D'après [6].

Malgré cette accentuation des tendances, la simplification des structures est souvent le seul moyen de monter en fréquence, encore est-il souvent nécessaire d'effectuer un tri des modes dominants (cf. [7] - [8]).

3. PREVISION ENERGETIQUE DIRECTE PAR L'EQUATION DE DIFFUSION DE LA CHALEUR (Cette partie s'inspire largement au travail de thèse de M. DJIMADOUM)

3.1. Introduction

La description des vibrations aux moyennes fréquences, pose déjà un problème de représentation, compte-tenu des faibles longueurs d'ondes en jeu, et on exploite le plus souvent les champs vibratoires à partir de leur énergie. Il apparaît ainsi inopportun de développer des calculs visant à obtenir les déplacements en module et phase, compte-tenu de la globalisation nécessaire à l'exploitation des résultats. un calcul direct de l'énergie serait tout-à-fait adapté dans cette plage de fréquence, et a suscité des travaux depuis quelques années. Citons les références [9] et [10] qui s'intéressent aux plaques raidies et au couplage vibroacoustique dans les conduits. Ces deux analyses supposent un caractère large bande et la connaissance de coefficients de couplage entre les ondes. En réf. [11], on utilise les hypothèses S.E.A. de proportionalité entre flux de puissance et différence d'énergie au niveau local, pour établir une équation de la chaleur. Cette relation est démontrée en réf. [12] dans le cas de barres, des membranes et pour le champ lointain des poutres et des plaques. Il subsistait cependant une difficulté pour écrire rigoureusement les conditions aux limites et de raccordement de structures, qui sont le plus souvent introduits empiriquement. En réf. [13], l'introduction des conditions de couplage est effectuée sous la forme de bornes par l'intermédiaire d'un coefficient représentant la part d'énergie cinétique dans l'énergie totale. L'introduction rigoureuse des conditions aux limites et de raccordement est effectuée en [14], pour le cas de poutres en flexions couplées, nous donnerons ici un bref aperçu de ces résultats. Citons enfin une mise en forme de la méthode et la résolution en [15], et une variante proposée en [16] ou en plus d'une équation de la chaleur ou adjoint une équation d'onde caractéristique de l'aspect réactif des champs.

3.2. Equation de la chaleur, température vibratoire

Pour mettre en forme la méthode, nous considérons le cas d'une poutre vibrant en flexion à la pulsation ω , sous l'action d'une force localisée en X_c . Elle est régie par l'équation :

$$\bar{E}I \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \rho S \omega^2 W(x, \omega) = F \delta(x - X_c) \quad (1)$$

avec : ρS : masse volumique de la poutre, I : inertie de flexion, $\bar{E} = E(1+j\eta)$: module de Young complexe.

En dehors du point d'excitation et des limites, les efforts appliqués à la poutre sont nuls et $W(x, \omega)$ vérifie l'équation homogène, dont la solution est donnée par :

$$W(x) = A e^{\bar{k}x} + B e^{-\bar{k}x} + C e^{\bar{k}x} + D e^{-\bar{k}x} \quad (2)$$

$$\text{avec } \bar{k}, \text{ nombre d'ondes complexes donné par : } \bar{k} = k_r + j k_i = \sqrt[4]{\omega^2 \frac{\rho S}{E}} \quad (3)$$

L'amortissement ne permet plus de classer les solutions en ondes progressives et évanescentes, cependant, la solution (2) fait apparaître deux ondes à décroissances lentes et deux ondes à décroissances rapides, (qui n'ont de réelle influence qu'au voisinage des singularités (excitation, limites)). Ainsi, les deux premiers termes de (2) représentent le champ lointain, les deux autres n'influencent que dans le champ proche des singularités, on peut en conséquence approcher le déplacement vibratoire en champ lointain par :

$$W(x) = Ae^{j\bar{k}x} + Be^{-j\bar{k}x} \tag{4}$$

Effectuons une moyenne spatiale du déplacement quadratique :

$$\Omega_{\Delta}(X) = \frac{1}{2\Delta} \int_{X-\Delta}^{X+\Delta} |W(x)|^2 dx \tag{5}$$

Si la longueur Δ sur laquelle s'effectue la moyenne spatiale est égale à un nombre entier de quart de longueur d'onde ou est suffisamment grande pour annuler les effets oscillants du couplage inter onde, on obtient :

$$\Omega_{\Delta}(X) = \frac{Sh}{2k_1 \Delta} (|A|^2 e^{-2k_1 X} + |B|^2 e^{2k_1 X}) \tag{6}$$

On peut alors construire une équation différentielle dont la solution est $\Omega_{\Delta}(X)$, il suffit de calculer la dérivée seconde par rapport à la variable glissante X , pour constater que le déplacement quadratique moyen est régi par une équation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 \Omega_{\Delta}(X)}{\partial x^2} - 4k_1^2 \Omega_{\Delta}(X) = 0 \tag{7}$$

Il existe un avantage énorme à considérer le déplacement quadratique moyen, car il est à variation lente ; les exponentielles de (7) sont d'arguments réels et font apparaître la partie imaginaire du nombre d'onde qui est (d'autant plus petite que l'amortissement est faible). Le déplacement quadratique moyen peut donc être assimilé à la "température vibratoire" de la poutre, il est défini en tout point X de la poutre éloigné des singularités et associé à un tronçon de longueur 2Δ .

3.2. Conditions aux limites

Pour résoudre le problème posé il faut munir l'équation (7) de conditions aux limites, qui doivent être de la forme (8), où X_0 est un point limite de la poutre et β un coefficient à déterminer.

$$\Omega_{\Delta}(X_0) = \beta \frac{\partial \Omega_{\Delta}}{\partial X}(X_0) \tag{8}$$

Une difficulté apparaît ici, car si il était raisonnable de négliger le champ proche loin des singularités il serait par contre faux, de l'ignorer pour l'écriture des conditions aux limites qui par nature concernent les singularités. Prenons par exemple l'extrémité d'une poutre, on peut décrire le champ vibratoire en négligeant l'effet de champs proche introduit par l'autre extrémité :

$$W(x) = Ae^{jkx} + Be^{-jkx} + Ce^{-kx} \quad (9)$$

En écrivant les 2 conditions aux limites en 0, on peut exprimer deux constantes en fonction de la troisième. Il suffit alors de calculer $\Omega_{\Delta}(\Delta)$ et $\partial\Omega_{\Delta}(\Delta)/\partial X$ qui dépendent de la seule constante restante et d'identifier β . On trouve :

$$\Omega_{\Delta}(\Delta) = 2k_i \operatorname{th}(2k_i\Delta) \frac{\partial\Omega_{\Delta}}{\partial X}(\Delta) \quad (10)$$

En procédant de même pour la seconde extrémité de la poutre, il vient :

$$\Omega_{\Delta}(L - \Delta) = -2k_i \operatorname{th}(2k_i\Delta) \frac{\partial\Omega_{\Delta}}{\partial X}(L - \Delta) \quad (11)$$

Remarques : 1 - Les conditions aux limites restent inchangées, que l'extrémité soit appuyée, encadrée ou libre.

2 - Les conditions aux limites doivent être écrites à une distance Δ de la limite compte-tenu de l'intégration nécessaire à la définition de Ω_{Δ} .

3 - La variable Ω_{Δ} ne représente le déplacement quadratique que loin des singularités, ainsi on n'écrit pas les conditions aux limites sur les déplacements quadratiques moyens réels.

4 - On peut montrer que Ω_{Δ} est proportionnel à l'énergie moyenne du champ lointain et $\partial\Omega_{\Delta}/\partial X$ à la puissance, moyenne passant dans les sections droites localisées en $X - \Delta$ et $X + \Delta$. On pourrait penser ainsi interpréter les conditions aux limites comme une relation puissance-énergie, mais compte-tenu de la remarque précédente, dans le champ proche, Ω_{Δ} n'est pas représentatif de l'énergie réelle mais uniquement de la partie champ lointain.

3.4. Conditions d'excitation et d'interface

On trouvera en [14] les démonstrations originales de cette analyse, nous ne donnons ici que les résultats et soulignons que pour les obtenir, il est nécessaire de moyenniser aussi sur une bande de fréquence afin de découpler les ondes.

L'application d'une force excitatrice d'amplitude F au point X_0 , comme modélisé à l'équation 1, conduit tous calculs fait à introduire deux conditions de raccord :

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_{\Delta}}{dX}(X_0) + \frac{d\Omega_{\Delta}}{dX}(X_0^*) &= -\frac{2k_i}{\operatorname{th}(2k_i\Delta)} [\Omega_{\Delta}(X_0) - \Omega_{\Delta}(X_0^*)] \\ \frac{d\Omega_{\Delta}}{dX}(X_0) - \frac{d\Omega_{\Delta}}{dX}(X_0^*) &= -2k_i \operatorname{th}(2k_i\Delta) [\Omega_{\Delta}(X_0) + \Omega_{\Delta}(X_0^*)] - \frac{|F|^2}{8} \frac{\operatorname{th}(2k_i\Delta)}{\Delta} \end{aligned} \quad (12)$$

Nous ne présentons pas ici pour raison de brièveté la condition d'interface entre deux poutres couplées, nous renvoyons le lecteurs à la référence [14].

3.5. Exemple d'application - Conclusion

Le cas de deux poutres couplées en "L" a été traité d'une part par la méthode exacte et fournit donc la solution de référence et d'autre part, grâce à l'équation de la chaleur. On constate sur la figure (2) que les deux approches coïncident exactement quand l'amortissement produit un fort recouvrement modal, et que l'effet moyen en fréquence est atteint quand l'amortissement est faible.

L'utilisation du concept de "température vibratoire" semble pertinent pour décrire les vibrations aux moyennes fréquences, de poutres assemblées. Il reste encore beaucoup de choses à faire pour généraliser et valider cette approche dans d'autres cas. Certains résultats encore partiels, tendent même à prouver que pour des plaques, cette technique est inadaptable. Il est selon nous encore trop tôt pour trancher, et l'effort de recherches entrepris devrait donner des résultats dans les années à venir.

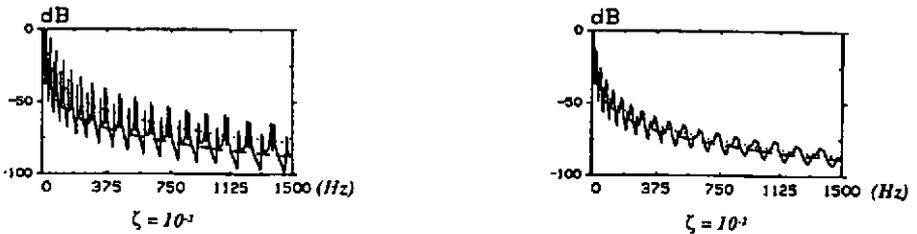


FIGURE 2 : Déplacement quadratique moyen sur la poutre excitée. Influence de l'amortissement.

4. ECHANTILLONNAGE MODAL

(cette partie s'inspire du travail de thèse de D. TRENTIN)

La méthode d'échantillonnage modal développée récemment [17], [18] en est encore au stade d'études de base. Elle s'appuie sur l'idée que lorsqu'un grand nombre de mode participe à la réponse vibratoire, on peut les globaliser, de façon à réduire la taille du problème dynamique à résoudre, sans perdre l'information capitale. Pour mettre en forme cette méthode, nous prenons le cas d'une plaque rectangulaire, simplement appuyée, de grande densité modale. Dans le cas où la plaque est homogène, les modes propres sont connus analytiquement et la réponse de la plaque peut s'exprimer à la pulsation ω sous la forme :

$$W(x, y, \omega) = \sum_n \sum_m a_{nm}(\omega) \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{m\pi}{b} y \tag{13}$$

L'amplitude modale $a_{nm}(\omega)$ s'obtient après utilisation de l'orthogonalité des fonctions propres :

$$a_{nm}(\omega) = F_{nm}^{(\omega)} \cdot b_{nm}^{(\omega)} \tag{14}$$

$F_{nm}^{(\omega)}$ est la force généralisée du mode, et $b_{nm}^{(\omega)}$ son admittance. Pour calculer le déplacement vibratoire, il est nécessaire de tronquer la série (13), c'est-à-dire de définir un groupe de mode I_R , sur lequel s'effectue la sommation, assurant une convergence raisonnable et fournissant une solution de référence réputée suffisante.

Un problème aussi académique peut se résoudre assez simplement à toutes les fréquences, le groupe I_R est très souvent le groupe des modes résonants qui se répartissent sur une couronne circulaire dans le plan de phase.

Considérons maintenant la même plaque support, mais sur laquelle agissent de multiples hétérogénéités de type masses ponctuelles ajoutées. On peut toujours chercher la solution sous la forme (13), mais l'orthogonalité des modes de plaques support n'étant pas vérifiée pour la structure hétérogène, les amplitudes des $a_{pq}(\omega)$ ne s'obtiennent plus par (14), mais nécessitent la résolution d'un système linéaire de type (15), qui est de grande taille en moyenne fréquence :

$$\left[b_{nmpq}^{(\omega)} \right] a_{pq}^{(\omega)} = F_{nm}^{(\omega)} \quad (15)$$

Les amplitudes $a_{pq}^{(\omega)}$ ne s'interprètent plus comme des amplitudes modales stricto-sensu, puisque les produits de sinus ne sont plus les modes propres de la plaque inhomogène.

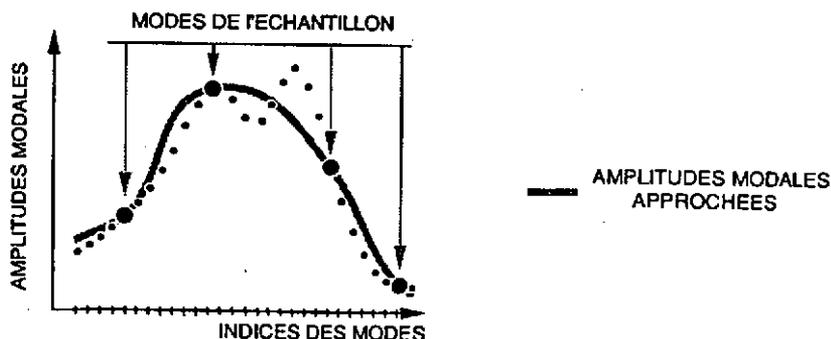


FIGURE 3 : Amplitudes modales exactes et interpolées

Un exemple d'amplitudes $a_{pq}^{(\omega)}$ est donné figure (3). On observe généralement une certaine tendance de variation, que l'on va exploiter de façon à approcher par interpolation, l'ensemble des termes $a_{pq}^{(\omega)}$ du groupe I_R à partir de la connaissance de certains d'entre eux.

Ce sous-groupe de termes constitue un échantillon, qui si il est représentatif du phénomène, permettra de bien interpoler l'ensemble des termes du groupe I_R . La figure (3) illustre l'idée que nous venons de développer, on distingue les amplitudes de chaque terme, et l'interpolation obtenue avec un échantillon de 4 termes. Cette voie nécessite un choix a priori des termes de l'échantillon, et aboutit à des résultats différents, pour une taille d'échantillon donné, dès l'instant où les termes choisis varient. Aussi, il est préférable d'échantillonner de façon indirecte sans faire à priori de choix de termes. On cherche alors les amplitudes modales sous la forme :

$$a_{pq}(\omega) = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \alpha_{ij}^{(\omega)} L_{ij}(p,q) \quad (16)$$

où les $L_{ij}(p,q)$ constituent un ensemble de fonction d'interpolation, et les α_{ij} sont les coefficients de participation associés.

Proceedings of the Institute of Acoustics

La réponse de l'ensemble des termes du groupe I_R est déterminée par la connaissance de $I \times J$ termes de l'échantillon. Il reste bien sur à trouver une technique de calcul des α_{ij} et ensuite d'étudier l'influence de la taille de l'échantillon.

4.2. Calcul des solutions par échantillonnage modal

Pour calculer les coefficients α_{ij} , nous allons employer une méthode variationnelle basée sur la fonctionnelle de Hamilton. En effet, en utilisant (16) dans (15), il vient :

$$W(x,y,\omega) = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \alpha_{ij}(\omega) \Psi_{ij}(x,y) ; \quad (17)$$

$$\text{avec } \Psi_{ij}(x,y) = \sum_p \sum_q \sin \frac{p\pi}{a} x \sin \frac{q\pi}{b} y \cdot L_{ij}(p,q) \quad (18)$$

Les fonctions $\Psi_{ij}(x,y)$ sont cinématiquement admissibles, puisque obtenues par combinaisons linéaires de fonctions elles mêmes cinématiquement admissibles. Elles fournissent en conséquence un ensemble de fonctions tests utilisables dans la fonctionnelle de Hamilton. Les valeurs α_{ij} sont celles rendant extremum la fonctionnelle en question, ce qui assure à l'approximation $W(x,y,\omega)$ obtenue d'être la meilleure pour la taille de l'échantillon considéré. Cette technique permet de réduire le modèle dynamique sans choix à priori et ainsi de traiter les problèmes moyennes fréquences avec des tailles matrices assez faibles. Remarquons que la méthode d'échantillonnage modal ne consiste pas à négliger des termes du développement, mais plutôt à globaliser leur action. En outre, elle ne nécessite pas le choix de certains modes à priori. Le calcul de réponse passe par la résolution d'un système linéaire, de taille beaucoup plus faible que le système original (17).

4.4. Quelques résultats

Nous montrons en figure (5), la prévision de l'énergie cinétique d'une plaque inhomogène, en fonction de la taille de l'échantillon de modes, considéré. On constate qu'un modèle dynamique ne représentant que 10% des termes de la décomposition est suffisant pour décrire à 3 dB l'énergie de la plaque. On montre en ref. [18], que si la prévision de l'énergie cinétique globale de la plaque supporte un échantillonnage sévère, une prévision plus locale nécessite un échantillonnage modal plus important, ou, au contraire, si une moyenne sur la fréquence est introduite, un échantillonnage encore plus faible est autorisé. En particulier, dans le cas où les modes excités sont bien identifiés, la méthode d'hybridation modale qui permet de déterminer un mode équivalent (cf. [19]), est un moyen efficace de limiter les calculs.

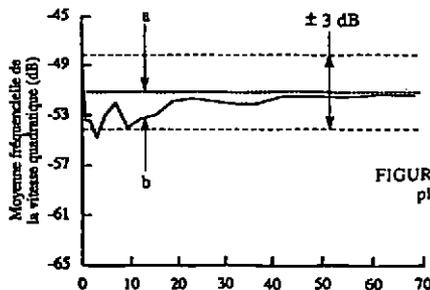


FIGURE 4 : Convergence de la méthode d'échantillonnage modal. plaque inhomogène excitée dans le 1/3 d'octave 1000 Hz..

a - Solution exacte ; b - Solution approchée

Pourcentage des modes pris en compte

5. FLOU STRUCTURAL, MILIEUX IMPARFAITEMENT CARACTERISES

5.1. Introduction

Une caractéristique des moyennes fréquences est la difficulté de caractériser les modèles par des données précises. On peut alors introduire une notion de flou structural ou de milieu imparfaitement caractérisé. Il ne faut plus dans ce cas se limiter à une seule valeur caractérisant les vibrations mais plutôt à des plages de variation qu'il s'agit de chiffrer. Nous examinons dans la suite deux voies possibles.

5.2. Flou structural

La notion de flou structural, introduite en ref. [20], [21] décrit les structures complexes sous la forme d'une structure maitresse déterministe, couplée à des éléments flous définis par des fonctions aléatoires. Pour donner un exemple simple, prenons encore une fois une plaque rectangulaire, chargé par des masses ponctuelles, supposées floues. La masse surfacique de la plaque peut alors s'écrire sous la forme :

$$\rho h + \sum_{j=1}^N \mu_j (1 + Y_j) \delta(x - x_j) \delta(y - y_j) \tag{19}$$

ou μ_j est la masse moyenne à ajouter au point j et Y_j une variable aléatoire de moyenne nulle, ρh la masse surfacique de la plaque support. La résolution de ces problèmes aboutit à des systèmes linéaire de type :

$$([Z] + [Z_a]) X = F$$

où $[Z]$ est la matrice caractéristique de la structure maitresse déterministe, $[Z_a]$ une matrice aléatoire caractéristique du flou, X le vecteur des inconnues donnant accès à la réponse de structure et F celui des excitations. Moyennant une méthode basée sur le développement en série de Neumann de l'opérateur aléatoire, la résolution du problème revient à celui d'un nombre limité de problèmes déterministes. Compte-tenu de la lourdeur des mathématiques à mettre en oeuvre nous ne détaillerons pas ici la méthode. La figure (5) donne un exemple de prévision concernant une plaque rectangulaire simplement appuyée et chargée de 576 oscillateurs flous. On montre la moyenne de l'énergie en en point et l'écart type associé. On constate que le flou ne perturbe pas trop la réponse de la structure maitresse, sur les deux premiers pics mais par contre lisse la réponse à plus haute fréquence. La théorie du flou est comparée aux résultats numériques obtenus par tirage aléatoire des caractéristiques des oscillateurs, résolution classique et calcul des moyennes et écart type sur différents tirages.

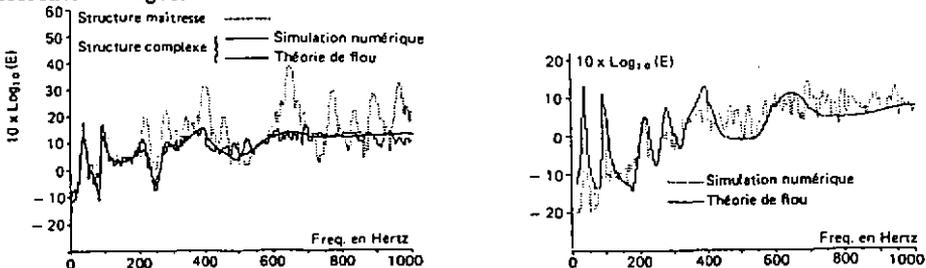


FIGURE 5 : Energie moyenne (a) et écart type (b) d'une plaque chargée d'oscillateurs flous (d'après [21])

Proceedings of the Institute of Acoustics

5.3. Les milieux imparfaitement caractérisés

Prenons comme cadre de référence un problème d'élasticité tridimensionnel. Une structure sollicitée en vibration à la pulsation ω doit vérifier les équations suivantes :

$$-\rho \omega^2 U_i + \sigma_{ij,j} = f_i \quad \text{dans } V \quad (20)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad \text{dans } V \quad (21)$$

$$\sigma_{ij} n_j = 0 \quad \text{sur } S_\sigma \quad ; \quad U_i = 0 \quad \text{sur } S_u \quad (22)$$

avec V : volume du milieu continu, S_σ (resp. S_u) partie de la surface libre (resp. encastrée). ρ est la masse volumique, f_i l'amplitude de la composante i de la force excitatrice harmonique.

Supposons que la loi de comportement (21) soit entachée d'une certaine incertitude :

$$\sigma_{ij} = (C_{ijkl} + \delta_{ijkl}) \epsilon_{kl} \quad (23)$$

δ_{ijkl} est un terme caractérisant l'incertitude de mesure que nous supposons faible devant C_{ijkl} . On quantifiera cette incertitude par le rapport énergétique.

$$R_e \left\{ \int_V \epsilon_{ij} \delta_{ijkl} \epsilon_{kl} dv \right\} / R_e \left\{ \int_V \epsilon_{ij} (C_{ijkl}) \epsilon_{kl} dv \right\} \leq \Delta^2 \forall \epsilon_{ij} \quad (24)$$

La quantité Δ est addimensionnelle, elle mesure l'incertitude relative sur la loi de comportement. La solution des équations (20) - (22), représente la réponse vibratoire moyenne, la prise en compte de l'incertitude sur la loi de comportement se repercutera par l'intermédiaire de bornes de variation. Ces bornes peuvent être chiffrées grâce aux résultats donnés en ref.[23] pour la réponse vibratoire harmonique, et en ref. [22] pour la localisation des fréquences propres.

On aura ainsi les bornes de fluctuation de l'énergie de déformation E_D d'un milieu vibrant à la loi de comportement incertaine.

$$\sqrt{E_D^0} (1 + \gamma(\omega) \Delta) \leq \sqrt{E_D} \leq \sqrt{E_D^0} (1 + \gamma(\omega) \Delta) \quad (25)$$

ou E_D^0 est l'énergie de déformation de la solution du problème (20) - (22), donnant la valeur moyenne, et $\gamma(\omega)$ est un facteur borné par 1 et $1/\eta$ ou η est le facteur de perte de la structure. Ce facteur amplificateur de l'erreur peut être estimé statistiquement en introduisant des hypothèses de répartition modale de l'incertitude.

Quand on s'intéresse à la localisation des pulsations propres, on a le résultat suivant issu de [22]. On considère dans ce cas un milieu purement élastique, et donc la loi de comportement réelle.

$$\omega_k^{02} (1 - \Delta^2) \leq \omega_k^2 \leq \omega_k^{02} (1 + \Delta^2) \quad (31)$$

où ω_k^{02} est la pulsation propre moyenne, calculée par résolution classique.

Proceedings of the Institute of Acoustics

L'incertitude en pulsation propre est directement liée, à l'incertitude énergétique sur la loi de comportement. On obtient ainsi un critère assez simple, pour chiffrer le flou associée à une structure, à partir de l'incertitude de localisation des pulsations propres.

6. CONCLUSION

Nous avons décrit quelques unes des voies de recherches actuelles, sur la prévision aux moyennes fréquences. Une première approche consiste à développer des méthodes semi-globalisantes, qui ne visent plus à la description locale exacte, mais plutôt à une prévision ne conservant que l'information principale.

Dans ce cadre, deux méthodes sont présentées : celle utilisant l'équation de la chaleur pour le calcul direct de l'énergie est bien adaptée aux problèmes des structures monodimensionnelles, mais pose encore des difficultés pour les structures bidimensionnelles, ou hétérogènes.

L'échantillonnage modal, vise à construire des modèles dynamiques de petite taille pour les calculs en moyenne fréquence, il s'agit d'interpoller la réponse de l'ensemble des modes d'un groupe à partir des tendances générales d'évolution. L'application numérique montre bien que plus l'information recherchée est globalisante, plus un échantillon de faible taille est suffisant.

Une deuxième approche est envisagée, elle présente les problèmes aux moyennes fréquences non plus uniquement comme la recherche d'une solution moyenne, mais aussi d'une borne de variation associée à l'incertitude sur la caractéristion de la structure.

Bibliographie

- [1] LYON R.H. and MAIDANIK G. Power flow between linearly coupled oscillators. JASA (34)5. 1962.
- [2] SCHARTON D.S. and LYON R.H. Power flow and energy sharing in random vibration. JASA (43). 1968.
- [3] FAHY F.J. L'analyse statistique énergétique. Revue d'acoustique (33). 1975.
- [4] LYON R.H. Statistical energy analysis of dynamical systems, theory and applications. MIT Press. 1975.
- [5] LANGLEY R.S. A wave intensity technique for the analysis of high frequency vibrations. JSV 159(3). 1992.
- [6] E. REBILLARD, B. LAULAGNET, J.L. GUYADER Influence of an embarked spring-mass system and defects on the acoustical radiation of a cylindrical shell. Applied Acoustics (36). 1992.
- [7] B. LAULAGNET, J.L. GUYADER Modal analysis of a shell's acoustics radiation in light and heavy fluids. JSV 31(3). 1989.
- [8] J.L. GUYADER Analyse modale du comportement vibroacoustique des structures. Mécanismes et réduction du bruit généré. Revue d'Acoustique (79). 1988.
- [9] BELOV V.D., RYBAK S.A. et TARTAKOVSKII B.D. Propagation of vibrational energy in absorbing structures. Soviet Physics Acoustics, 1977, Vol. 23, n°2, p. 115-119.

Proceedings of the Institute of Acoustics

- [10] BUTLITSKAYA I. A., VYALYSHEV A.I. et TARTAKOVSKI B.D. Propagation of vibrational and acoustic energy along a structure with losses. Soviet physics Acoustics, 1983, Vol. 29, N°4, p. 333-334.
- [11] NEFSK, D.J., et SUNG, S.H. Power flow finite element analysis of dynamic systems : basic theory and application to beams. Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 1989, Vol. 111.
- [12] BOUTHIER O., BERNHARD R.J. et WOHLEVER J.C. Energy and structural intensity formulations of beam and plate vibrations. 3^{ème} Congrès International sur l'Intensimétrie, : CETIM, 1990.
- [13] WOHLEVER J.C. et BERNHARD R.J. Mechanical energy flow models of rods and beams. Journal of Sound and Vibration, 1992, Vol. 153, N°1.
- [14] M. DJIMADOUM et J.L. GUYADER. Calcul des champs vibratoires aux moyennes fréquences par équation de la chaleur. Conditions aux limites, d'excitation et de raccordement. Mémoire interne du L.V.A. 1992.
- [15] LUZZATO E. Etude des équations de densité d'énergie de vibration. Clamart : EDF, IRapport interne n° HP-62/90.003, 1990.
- [16] LASE K et JEZEQUEL L. Analysis of a dynamic system based on a new energetic formulation. 3^{ème} Congrès International sur l'Intensimétrie, Senlis, CETIM, 1990.
- [17] J.L. GUYADER Modal Sampling Method for the vibration study of systems of high modal density. JASA 88 (5). 1990.
- [18] D. TRENTIN et J.L. GUYADER Convergence of the Modal Sampling Method in the medium frequency range. Paper 3a SA6 JASA 92 (4) 1992.
- [19] H.J.P. MORAND A modal hybridization method for the reduction of dynamic models in the medium frequency range. European conference on new advances in computational Structural Mechanics. 1991.
- [20] C. SOIZE Modélisation probabiliste du flou structural en dynamique linéaire des systèmes mécaniques complexes. I - éléments théoriques. La Recherche Aérospatiale n° 5. 1986.
- [21] F. CHABAS, A. DESANTI, et C. SOIZE. Modélisation probabiliste du flou structural en dynamique linéaire des systèmes mécaniques complexes. II. Analyse numérique et application. La Recherche Aérospatiale n°5 1986.
- [22] J.L. GUYADER Vibrations libres des milieux continus élastiques imparfaitement caractérisés. J.M.T.A. Vol. 6. 1987.
- [23] J.L. GUYADER Uncertainly bounds for energy of imperfectly described Vibration fields. I.J. Solids. Structures 27 (2). 1991.