

CALCUL DE MODES ACOUSTIQUES EN MILIEU INHOMOGÈNE PAR LA METHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

J.P. Priou, E. Redon, Y. Gervais & J.L. Peube

Laboratoire d'Études Aérodynamiques, Av du Recteur Pineau, 86022 Poitiers Cedex, FRANCE

INTRODUCTION

On examine ici quelques propriétés thermoacoustiques des cavités sur la base de calculs effectués par la méthode des éléments finis, l'inhomogénéité du milieu étant associée à l'existence de gradients de température moyenne. Les résultats présentés sont obtenus à partir de situations idéalisées, mais de tels calculs trouvent en particulier leur application dès lors qu'on cherche à définir les caractéristiques acoustiques de foyers ou de brûleurs industriels. Il s'agit par exemple du calcul des fréquences de résonance de telles installations, en intégrant au mieux les fortes disparités du milieu moyen dues à la présence d'une flamme, ou encore de la détermination de la fonction de transfert de la cavité chauffée en réponse à l'excitation acoustique de la flamme turbulente ou à d'éventuelles, mais toujours présentes en pratique, oscillations des conditions d'alimentation du brûleur.

De plus, il est bien connu que la présence d'une source de chaleur importante dans une cavité, et *a fortiori* dans un foyer industriel, peut conduire à une très forte amplification des ondes acoustiques qui s'y propagent si un certain nombre de précautions ne sont pas prises [1]. Ce phénomène, qui résulte en fait du couplage instationnaire entre les ondes acoustiques et la source de chaleur, peut être évité si on place la source de chaleur en dehors des zones d'intensité acoustique maximale [2]. Seul un calcul suffisamment précis de la répartition spatiale de l'intensité acoustique moyenne peut apporter les informations nécessaires au respect de cette règle, répartition profondément modifiée par les différences de température moyenne.

On propose donc par la suite ce calcul en appliquant la méthode des éléments finis, ce qui permet de tenir compte facilement de géométries complexes et d'intégrer des sources acoustiques ou des impédances de rayonnement et de paroi. Après quelques rappels généraux sur l'application de la méthode des éléments finis dans des situations voisines, on écrit l'équation de propagation des ondes dans un milieu à célérité variable, caractérisé ici par l'existence de gradients de température moyenne. La méthode des éléments finis est ensuite développée dans le cas d'un résonateur d'Helmholtz à deux cols, cavité qui représente de façon très schématique le foyer d'un brûleur industriel, permettant ainsi de dégager et de valider un certain nombre de résultats numériques.

La méthode des éléments finis est utilisée depuis longtemps pour le traitement de la propagation des ondes dans les espaces limités. La littérature est particulièrement abondante dans ce domaine, aussi peut-on citer quelques travaux de référence. La méthode du principe variationnel constitue la base des calculs par éléments finis effectués en acoustique. Elle a en particulier été utilisée par Craggs [3] et Petyt [4] pour la détermination des modes de résonance de cavités de géométries complexes. Une approche identique a également été adoptée par Petyt et Filippi [5] pour le traitement de la propagation acoustique harmonique en écoulement.

CALCUL DE MODES ACOUSTIQUES EN MILIEU INHOMOGÈNE

Kagawa a complété le travail précédent en donnant une formulation de l'équation d'Helmholtz dans le cas particulier de la propagation en milieu inhomogène [6]. Cette formulation, qui est ensuite reprise par Geddes et Porter [7], peut prendre en compte une absorption localisée. Laverdant [8] a utilisé la méthode de Galerkin pour décrire l'influence de la température sur le champ de pression acoustique. Ces travaux considèrent systématiquement les impédances de surface et la célérité du son comme des constantes élémentaires. La présence de forts gradients de température près des parois nous amènent à prendre en compte la valeur de la célérité en chaque noeud du maillage, la valeur moyenne sur la surface limite n'étant pas nécessairement la même que celle de l'élément dans sa totalité.

L'écriture des différentes formes de conditions aux limites intervenant en acoustique linéaire a été résumée par Bernhard et Takeo [9]. Ceux-ci complètent la description des phénomènes de propagation acoustique en cavité par le calcul des champs de vitesse, d'intensité, ainsi que d'énergie acoustique.

I - ÉQUATION DE PROPAGATION

Dans les situations qui nous intéressent, la propagation des ondes se singularise par l'existence d'un champ de température moyenne fortement inhomogène. De même, un écoulement moyen non-uniforme est en général présent dans les configurations réelles. Les effets de celui-ci sont négligés ici, ce qui apparaît tout à fait légitime tant que le nombre caractéristique de l'écoulement, le nombre de Mach, reste petit.

D'autre part, on ne s'intéresse ici qu'à la propagation des ondes, en laissant de côté les couplages thermoacoustiques évoqués précédemment. Le fait que le milieu moyen ne soit pas isotherme ne signifie alors pas pour autant qu'il soit générateur d'énergie acoustique. La propagation des ondes est donc isentropique et répond ainsi aux hypothèses habituelles de l'acoustique linéaire.

Compte tenu de la relation d'état, qui permet d'exprimer la pression en fonction de l'entropie et de la masse volumique, on obtient l'équation qui relie les fluctuations acoustiques de pression et de masse volumique :

$$(1) \quad \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dp}{dt} - \vec{\nabla} \cdot \vec{g} \text{grad} \bar{p}$$

où \bar{p} désigne la valeur locale de la masse volumique, et d/dt la dérivée particulaire.

L'équation de propagation dans un milieu non isotherme pour un régime d'oscillation harmonique s'écrit :

$$(2) \quad \text{div}(c^2 \vec{g} \text{grad} P) + \omega^2 P = 0$$

où la célérité c et la pression complexe P sont fonctions des variables d'espace, et où ω est la pulsation des oscillations.

CALCUL DE MODES ACOUSTIQUES EN MILIEU INHOMOGÈNE

II - MISE EN PLACE DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

La résolution de l'équation des ondes est abordée de deux façons différentes.

1 - On effectue tout d'abord une étude modale de la cavité, qui consiste en la recherche des fonctions propres - c'est à dire des modes de résonance - solutions de l'équation (2). On tient compte alors de conditions aux limites simples, du type Neuman ou Dirichlet. Dans ce cas, la discrétisation par éléments finis de l'équation (2) conduit au système matriciel aux valeurs propres suivant :

$$(3) \quad ([S] - (kL)^2 [M])(p) = 0$$

où $[S]$ et $[M]$ sont assimilés aux matrices de raideur et de masse du système discrétisé, et kL le nombre d'onde adimensionné (L est la plus grande dimension du volume étudié).

2 - Une seconde approche concerne la détermination du champ acoustique se propageant dans la cavité, compte tenu cette fois de l'existence d'une source. Le problème numérique se caractérise alors par la présence d'un second membre dans le système à résoudre, où kL est alors une donnée du problème. Les conditions aux limites peuvent ici être plus réalistes, puisqu'on peut prendre en compte une source acoustique, des impédances de paroi et de rayonnement.

L'application classique de la méthode conduit à la forme suivante de l'équation (2):

$$(4) \quad ([S] - (kL)^2 [M] + [R_1])(p) = [R_2](u)$$

Si $\{N\}$ est le vecteur constitué par les fonctions d'interpolations, les matrices s'écrivent :

$$\begin{aligned} [M] &= \int \{N\} \{N\}^T dV & [S] &= \int \{dN\} c^2 \{dN\}^T dV \\ [R_1] &= jkL \int \{N_s\} (1/z) \{N_s\}^T dS & [R_2] &= -jkL \int \{N_s\} \{N_s\}^T dS \end{aligned}$$

où z est l'impédance spécifique adimensionnée au point considéré, et $\{dN\}$ la matrice des dérivées des fonctions d'interpolations.

3 - Dans les deux cas envisagés précédemment, les champs de vitesse et d'intensité moyenne acoustiques sont obtenus à partir de la répartition de pression dans le volume étudié par les formules suivantes :

$$u = j(c^2/kL) [dN]^T (p) \quad \text{et} \quad I = 1/2 \operatorname{Re}(p^* u)$$

III - MODES PROPRES D'UNE CAVITÉ CHAUFFÉE

Les calculs sont conduits dans un résonateur d'Helmholtz à deux cols vertical, forme simplifiée d'un foyer réel. En pratique, le résonateur étudié a une hauteur de 35 cm pour un diamètre de 14 cm. Les cols ont respectivement une hauteur de 3 cm et un diamètre de 5 cm. Les calculs numériques sont validés à partir d'expérimentations effectuées sur une géométrie identique.

CALCUL DE MODES ACOUSTIQUES EN MILIEU INHOMOGÈNE

III.1 - Résonance acoustique à température constante

Le système aux valeurs propres (3) est résolu par la méthode de l'itération du sous-espace compte tenu des conditions aux limites de Dirichlet aux extrémités ouvertes du résonateur et de Neuman sur les parois de celui-ci.

La répartition spatiale de la pression acoustique de deux des premiers modes de résonance est donnée sur les figures 1 et 2. Comme le montre la figure 1, la pression acoustique du premier mode de résonance prend une valeur constante dans le volume de la cavité. La propagation reste ici très proche des ondes planes, sauf dans les zones de changement de section où les effets tridimensionnels sont bien sûr prépondérants. La figure 2 représente quant à elle la répartition de pression lorsqu'un mode de résonance radial est atteint. Dans ce cas, la pression acoustique est semblable à celle qu'on pourrait obtenir dans une cavité cylindrique fermée.

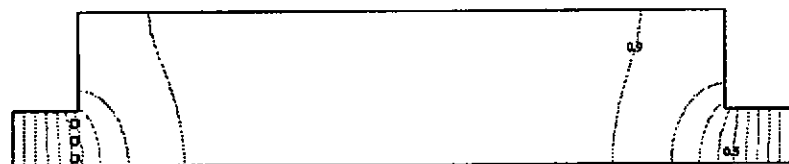


Figure 1 :
Premier mode
de résonance
de nombre
d'onde
 $kL=1.51$

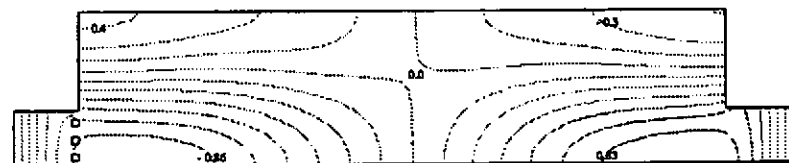


Figure 2 :
Mode de
résonance de
nombre
d'onde
 $kL=18.79$

Le tableau 1 donne les valeurs des nombres d'onde des neuf premiers modes de résonance calculés et mesurés expérimentalement. Les calculs numériques sont conduits simultanément en coordonnées cartésiennes tridimensionnelles ainsi qu'en coordonnées cylindriques. Comme l'indique le tableau 1, la correspondance entre les deux méthodes de calcul est très bonne. On remarque toutefois un écart systématique avec les valeurs obtenues expérimentalement. Celui-ci est principalement dû à l'approximation numérique consistant à négliger l'impédance de rayonnement, et donc à considérer la pression acoustique rigoureusement nulle aux extrémités ouvertes du résonateur.

La figure 3 indique que l'intensité acoustique du mode fondamental de résonance est maximale dans les zones de changement de section. Il apparaît donc que c'est dans cette zone que doit être placée une source de chaleur si on veut favoriser l'amplification thermoacoustique. Toutefois, l'introduction d'une source de chaleur dans le volume du résonateur modifie les caractéristiques physiques du champ moyen, en l'occurrence sa température. La détermination rigoureuse des zones d'intensité acoustique maximale nécessite donc la prise en compte de ces inhomogénéités de température.

CALCUL DE MODES ACOUSTIQUES EN MILIEU INHOMOGÈNE

Coord. cart. T° cste	Coord cyl. T° cste	Expérience T° cste	Coord cart. T° non cste	Coord cyl. T° non cste	Expérience T° non cste
1.55	1.51	1.26	1.61	1.57	1.31
4.40	4.36	4.14	4.57	4.51	4.32
7.94	7.86	7.68	8.24	8.15	7.98
9.50	9.39	-	9.94	9.79	-
10.40	10.18	-	10.79	10.58	-
11.75	11.52	11.31	12.17	11.91	11.79
12.38	12.11	-	12.90	12.54	-
15.33	14.77	-	15.87	15.27	-
15.77	15.23	15.03	16.27	15.74	15.54

Tableau 1 : Nombre d'onde des modes de résonance du résonateur de Helmholtz à deux cols
Résultats numériques et expérimentaux à température constante et non constante.

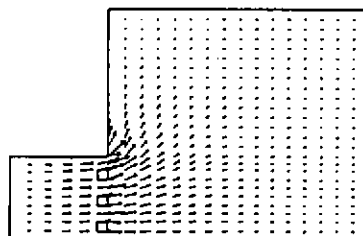


Figure 3 : Intensité acoustique du mode fondamental au niveau du changement de section inférieur

III.2 - Résonance acoustique en champ de température inhomogène

La température moyenne sur chaque noeud est obtenue numériquement à l'aide d'un code de calcul de mécanique des fluides en considérant une grille chauffante placée dans la partie supérieure du premier col, provoquant ainsi un phénomène de convection naturelle dans la cavité.

Les figures 4 et 5 donnent les répartitions spatiales des modes de résonance définies sur les figures 1 et 2, compte tenu cette fois de la présence du champ de température non uniforme. On constate que les ondes acoustiques sont réfractées, de telle sorte que la pression acoustique, et de façon plus générale l'énergie acoustique, est concentrée dans les zones les plus froides. Si cet effet reste peu important pour le premier mode de résonance, c'est à dire pour les faibles nombres d'onde il n'en est pas de même pour les nombre d'ondes élevés pour lesquels la répartition de pression est fortement modifiée (Cf. figures 6a et 6b).

Le tableau 1 indique les valeurs des fréquences de résonance calculées à partir des deux méthodes numériques 3D et 2D cylindrique, ainsi que celles obtenues dans des conditions expérimentales analogues. On constate là encore que les deux méthodes numériques donnent des résultats très proches, mais qu'il existe toujours un écart systématique avec les valeurs expérimentales.

CALCUL DE MODES ACOUSTIQUES EN MILIEU INHOMOGÈNE

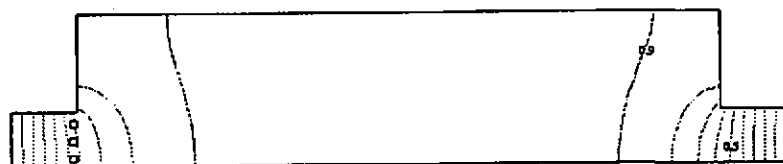


Figure 4 :
 $kL = 1.61$
température
non
uniforme

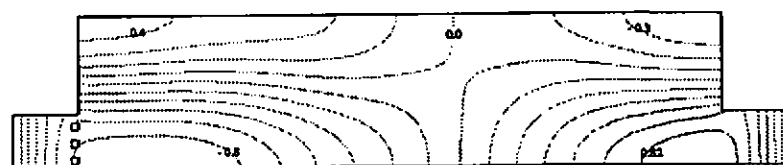


Figure 5 :
 $kL = 20.44$
température
non
uniforme

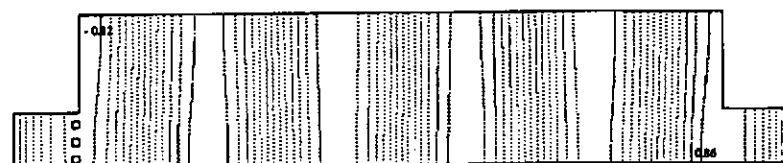


Figure 6a :
 $kL = 18.96$
température
uniforme

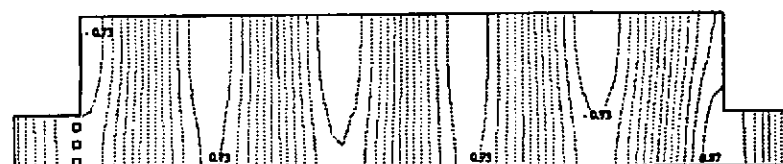


Figure 6b :
 $kL = 19.60$
température
non
uniforme

IV - CAS DES ONDES PROGRESSIVES

Comme nous l'avons vu précédemment, le calcul précis des fréquences de résonance d'une cavité chauffée ou non exige la prise en compte des impédances de rayonnement. Le traitement numérique diffère alors ici par l'introduction d'une source au sein de la cavité. En pratique, ceci est réalisé en imposant la vitesse acoustique sur quelques noeuds de la surface inférieure du volume du résonateur.

IV.1 - Prise en compte de l'impédance de rayonnement

Le tableau 2 donne les valeurs des nombres d'onde des premiers modes de résonance. Notons dans ce cas que les fréquences de résonance sont obtenues numériquement lorsqu'elles conduisent à des amplitudes de pression interne très grande devant la valeur imposée. On constate une très bonne concordance entre résultats numériques (effectués ici uniquement en 3D) et expérimentaux, que la cavité soit chauffée ou non.

CALCUL DE MODES ACOUSTIQUES EN MILIEU INHOMOGÈNE

Calcul T° uniforme	Expérience T° uniforme	Calcul T° variable	Expérience T° variable
1.27	1.26	1.31	1.31
4.19	4.14	4.33	4.32
7.75	7.68	8.04	7.98
9.54	-	9.96	-
10.37	-	10.79	-
11.55	11.31	11.95	11.79

Tableau 2 :
Nombre d'onde à la résonance
de la cavité après prise en
compte des impédances de
rayonnement

Une telle démarche permet ainsi de déterminer la réponse en fréquence de la cavité. Les spectres numériques sont portés sur la figure 7a. La confrontation avec un spectre expérimental (figure 7b) confirme la validité de la méthode de calcul.

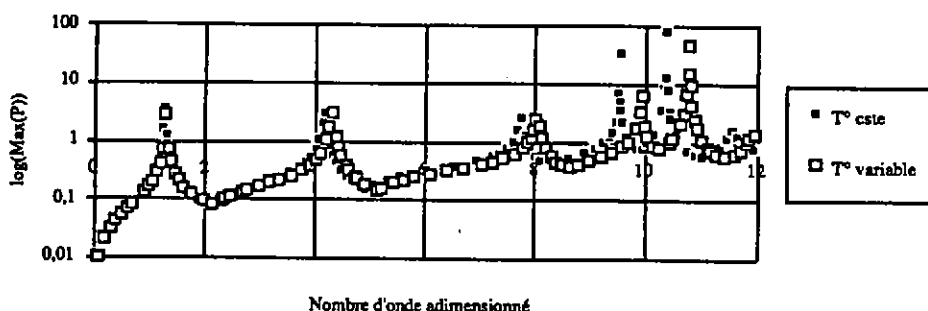


Figure 7a : Réponse calculée de la cavité à une excitation

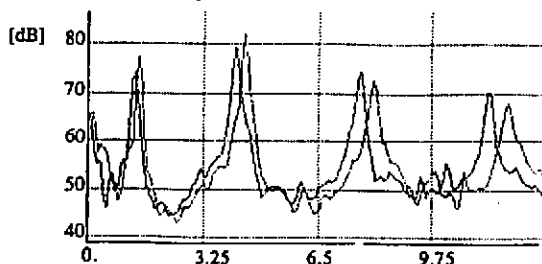


Figure 7b :
Réponse
expérimentale de la
cavité à une
excitation

IV.2 - Fonction de transfert

La méthode de calcul précédente peut être étendue à la détermination de la fonction de transfert de la cavité. Il s'agit donc ici d'examiner la réflexion et la transmission d'une onde plane incidente à travers le résonateur chauffé ou non.

Le problème est alors posé en termes légèrement différents puisqu'on suppose que chaque col du résonateur est prolongé par un tube de longueur infinie. On impose l'onde incidente en amont de

CALCUL DE MODES ACOUSTIQUES EN MILIEU INHOMOGÈNE

la cavité, et le calcul de l'amplitude de l'onde transmise, une fois redevenue plane, permet de définir la fonction de transfert du résonateur [5].

La figure 9 représente l'atténuation du résonateur en présence ou non du champ de température pour de basses fréquences. On constate encore une fois un décalage en fréquence, dû à la température. Les résultats sont très proches de ceux obtenus à partir de la théorie des ondes planes, et en accord avec ceux obtenus par Kim et al. [10].

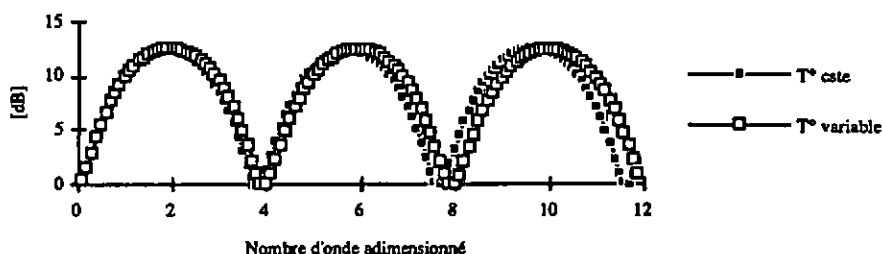


Figure 8 Atténuation de la pression par un résonateur d'Helmholtz à deux cols en présence ou non d'un champ de température non uniforme

IV - CONCLUSION

L'utilisation d'un code de calcul basé sur la méthode des éléments finis nous a permis de calculer les fréquences propres de cavités acoustiques chauffées de forme complexe, ainsi que le champ de pression associé à chacune de ces fréquences, permettant ainsi de mettre en évidence l'influence d'un champ de température non-uniforme sur ces modes propres.

La prise en compte de l'impédance de rayonnement à chacune des ouvertures de la cavité étudiée permet de définir avec précision la réponse en fréquence d'une cavité acoustique. Le calcul de la fonction de transfert offre également un bon accord avec la théorie des ondes planes, tout moins pour les basses fréquences.

Ces résultats montrent que la méthode de calcul est au point et peut maintenant être adaptée à des configurations plus réalistes, comme par exemple au problème réel posé par la propagation des ondes et les couplages thermoacoustiques dans les foyers industriels.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] K. T. FELDMAN - J. So. and Vib., 7, p. 83-88, 1968
- [2] J.-L. PEUBE et Y. GERVAIS - Revue d'Acoustique, 82, p. 68-71, 1987
- [3] A. CRAGGS - J. So. and Vib., 23, p. 331-339, 1972
- [4] M. PETYT, J. LEA and G. H. KOOPMANN - J. So. and Vib., 45, p. 495-502, 1976
- [5] M. PETYT - "Theoretical Acoustics and Numerical Techniques", Edited by P. FILIPPI, Springer-Verlag, 1983
- [6] Y. KAGAWA, T. YAMABUCHI and A. MORI - J. So. and Vib., 53, p. 357-374, 1977
- [7] E. R. GEDDES and J. C. PORTER - J. Ac. Soc. of Am., 83, p. 1431-1435, 1988
- [8] A. LAVERDANT - "Contrôle Actif et Instabilités en Combustion", S.F.T., 1989
- [9] R. J. BERNHARD and S. TAKEO - J. Ac. Soc. of Am., 83, p. 2224-2232, 1988
- [10] Y.-H. KIM, J. W. CHOI and B. D. LIM - Trans. of the ASME, 112, p. 460-467, 1990