

EFFORTS AUX JONCTIONS DANS LES ASSEMBLAGES EXCITÉS PAR CHOC

M. Djimadoum (1), J. Roland (1) et J.L. Guyader (2)

(1) C.S.T.B., Service Acoustique - 24, rue J. Fourier, 38400 St Martin d'Hères, France

(2) I.N.S.A., Laboratoire Vibrations Acoustique - 20, av. A. Einstein, 69621 Villeurbanne, France

1. INTRODUCTION

Le problème vibratoire transitoire d'assemblages de structures soulève trois difficultés : le caractère non stationnaire des excitations nécessitant a priori un traitement particulier des équations de mouvement, la modélisation des systèmes assemblés et la modélisation d'éventuelles liaisons non linéaires. Il est généralement traité par éléments finis couplés à des méthodes de discrétisation temporelle telles que les différences finies [3]. Le principe que nous avons adopté pour régler ces difficultés est basé sur la connaissance de chaque structure prise séparément, permettant ainsi de calculer les réponses de l'assemblage pour des conditions de couplage différentes sans effectuer une résolution complète du problème. C'est en quelque sorte l'analogue de la méthode d'assemblage par mobilités de systèmes linéaires ([1], [4] et [5]), à des liaisons éventuellement non linéaires. La principale différence réside dans le fait de devoir effectuer le calcul dans le domaine temporel et non plus dans le domaine fréquentiel. La notion de mobilité est alors remplacée par celle de mobilité ou d'admittance impulsionnelle. Sur le plan pratique, cette technique de prévision du comportement d'assemblages offre la possibilité de mixer données expérimentales ou résultats de calcul pour les admittances impulsionnelles, suivant la disponibilité ou la capacité de modélisation des systèmes mis en jeu. Après une présentation générale, l'article suivant décrit une technique de calcul par analyse modale des admittances impulsionnelles et différentes résolutions des équations des efforts aux jonctions. Ces diverses possibilités de calcul nous ont incité à effectuer une étude comparative dans le cas transitoire des méthodes de résolution évoquées. Ainsi, le travail présenté ci-après est basé sur la sous structuration de l'assemblage étudié, l'introduction d'inconnues aux liaisons [2] et la caractérisation de chaque structure par des admittances impulsionnelles afin d'élaborer des équations que l'on résout par intégration directe et par une méthode plus originale de type Galerkin. L'ensemble du procédé est appliqué numériquement au cas de deux poutres assemblées dont l'une est excitée par un choc de type demi-sinus, en faisant ainsi ressortir les caractéristiques des contraintes maximales aux liaisons.

2. PRINCIPE

Le principe de la procédure utilisée afin d'obtenir les équations de résolution attachées au problème étudié est illustré sur la figure 1 dans le cas de deux poutres couplées. Supposant ainsi un assemblage a priori quelconque de N_s structures vibrantes couplées par l'intermédiaire de N_c couplages, nous avons caractérisé les vibrations de chacune de ces structures, prise isolément, puis étudié le couplage les liant aux autres par l'introduction d'efforts de liaison à déterminer. Cette méthodologie est analogue à l'assemblage par mobilités utilisé dans l'espace fréquence pour des systèmes linéaires. Ainsi, on désolidarise chacune des N_s structures et on tient compte du couplage normalement existant en appliquant, à chacune d'elles, des excitations supplémentaires, représentant l'influence du reste de l'assemblage et que l'on note, pour une structure i , $F_{ik}(t)$. On a alors le mouvement de la structure i régi par l'équation différentielle (1) écrite pour chacune des N_s structures de l'assemblage :

EFFORTS AUX JONCTIONS DANS LES ASSEMBLAGES EXCITES PAR CHOC

$$L_i(\bar{W}_i(\bar{x}^{(i)}; t)) = \bar{F}_i(\bar{x}^{(i)}; t) + \sum_{\substack{k=1 \\ i \in k}}^{N_c} \bar{F}_{ik}(\bar{x}_k^{(i)}; t) \tag{1}$$

avec : L_i : opérateur différentiel lié à la structure i ; \bar{W}_i : déplacement de la structure i référencé à un repère orthonormé lié à i et dépendant de $\bar{x}^{(i)}$; coordonnées d'un point de i et du temps t ; \bar{F}_i : vecteur des sollicitations extérieures s'exerçant sur la structure i ; k : indice de couplage ; \bar{F}_{ik} : effort exercé sur i par l'ensemble des autres structures composant k , lui-même repéré par les points de coordonnées $\bar{x}_k^{(i)}$ dans le repère lié à i .

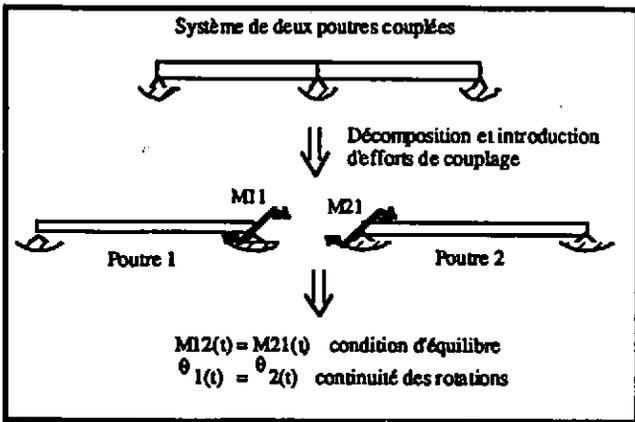


figure 1 : Etapes du procédé

L'écriture des conditions d'équilibre et des conditions aux limites (ou d'assemblage) de chacun des N_c couplages permet ensuite de poser les équations de résolution en termes des efforts supplémentaires introduits. Dans le cas d'un couplage conservatif k , sans masse et rigide, on a continuité des déplacements (2) et équilibre des efforts (3) :

$$\bar{W}_i(\bar{x}_k^{(i)}; t) = \bar{W}_j(\bar{x}_k^{(j)}; t) \text{ pour } i \neq j \text{ et } i \text{ et } j \text{ reliées par } k \tag{2}$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \in k}}^{N_c} \bar{F}_{ik}(\bar{x}_k^{(i)}; t) = \bar{F}_k(\bar{x}_k; t) \tag{3}$$

avec : \bar{F}_k : sollicitation extérieure éventuelle s'exerçant à l'endroit du couplage, représenté par les coordonnées \bar{x}_k dans un repère orthonormé fixe lié à l'assemblage complet.

Nous nous intéressons pour l'instant à ce type de couplage, dont les équations de continuité font intervenir les déplacements aux liaisons. Pour obtenir un système de résolution en termes des efforts de couplage uniquement, il nous faut trouver une relation liant ces derniers aux déplacements aux liaisons. Celle-ci est obtenue à partir de la résolution de l'équation (1), grâce à un concept

EFFORTS AUX JONCTIONS DANS LES ASSEMBLAGES EXCITES PAR CHOC

d'admittance impulsionnelle utilisée de façon similaire à une fonction de Green. On a ainsi pour une structure i isolée :

$$\bar{W}_i(\bar{x}^{(i)}; t) = \int_{V_i} \int_{-}^{-} \bar{A}_i(\bar{x}^{(i)}; \bar{x}_0^{(i)}; t-t_0) \left(\bar{F}_i(\bar{x}_0^{(i)}; t_0) + \sum_{\substack{k=1 \\ i \in k}}^{N_c} \bar{F}_{ik}(\bar{x}_k^{(i)}; t_0) \right) dt_0 d\bar{x}_0^{(i)} \quad (4)$$

avec : V_i : volume de la structure i ; A_i : admittance impulsionnelle caractéristique de la structure i et solution de l'équation différentielle :

$$L_i(\bar{A}_i(\bar{x}^{(i)}; \bar{x}_0^{(i)}; t)) = \delta(\bar{x}^{(i)} - \bar{x}_0^{(i)}) \delta(t) \quad (5)$$

L'équation (5) peut être résolue classiquement par analyse modale :

$$\bar{A}_i(\bar{x}^{(i)}; \bar{x}_0^{(i)}; t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(i)}(\bar{x}^{(i)}) f_n^{(i)}(\bar{x}_0^{(i)}) q_n^{(i)}(t)$$

avec : n : indice du mode ; $f_n^{(i)}$: base de fonctions orthogonales vérifiant le problème aux valeurs propres associé à l'équation différentielle (5) munie de ses conditions aux limites ; $q_n^{(i)}$: amplitudes temporelles des $f_n^{(i)}$.

Ainsi, on obtient un système d'équations à résoudre, dans le cas d'un couplage rigide conservatif, constitué des équations (3) et de l'équation (6) suivante, issue de (2) tenant compte de (4) :

$$\int_{V_i} \int_{-}^{-} \bar{A}_i(\bar{x}_k^{(i)}; \bar{x}_0^{(i)}; t-t_0) \left(\bar{F}_i(\bar{x}_0^{(i)}; t_0) + \sum_{\substack{l=1 \\ i \in l}}^{N_c} \bar{F}_{il}(\bar{x}_l^{(i)}; t_0) \right) dt_0 d\bar{x}_0^{(i)} = \int_{V_j} \int_{-}^{-} \bar{A}_j(\bar{x}_k^{(j)}; \bar{x}_0^{(j)}; t-t_0) \left(\bar{F}_j(\bar{x}_0^{(j)}; t_0) + \sum_{\substack{l=1 \\ j \in l}}^{N_c} \bar{F}_{jl}(\bar{x}_l^{(j)}; t_0) \right) dt_0 d\bar{x}_0^{(j)} \quad (6)$$

3. RESOLUTION DES EQUATIONS DU PROBLEME

3.1. Méthode d'intégration directe

Cette méthode de résolution du système d'équations (3) et (6) consiste simplement à discrétiser dans le temps les équations de ce dernier, de façon à isoler les inconnues F_{ik} à l'instant t des autres paramètres du système et des F_{ik} aux instants précédents. Les intégrales de convolution sont approchées grâce à un schéma numérique des rectangles. Appliquant ce schéma, le système devient, pour $t=N\Delta t$ et un couplage k quelconque de l'assemblage :

EFFORTS AUX JONCTIONS DANS LES ASSEMBLAGES EXCITES PAR CHOC

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta t \sum_{i=1}^{N_c} \bar{F}_{ij}(\bar{x}_i^{(i)}; N\Delta t) \int_{V_i} \bar{A}_i(\bar{x}_i^{(i)}; \bar{x}_0^{(i)}; 0) d\bar{x}_0^{(i)} - \Delta t \sum_{j=1}^{N_c} \bar{F}_{ji}(\bar{x}_j^{(j)}; N\Delta t) \int_{V_j} \bar{A}_j(\bar{x}_j^{(j)}; \bar{x}_0^{(j)}; 0) d\bar{x}_0^{(j)} &= Q_{ijk} \\ \sum_{i=1}^{N_c} \bar{F}_{ik}(\bar{x}_k^{(i)}; N\Delta t) &= \bar{F}_k(\bar{x}_k; N\Delta t) \end{aligned} \right. \quad (7)$$

avec :

$$Q_{ik} = \Delta t \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{n=1}^{N-1} \bar{F}_{ij}(\bar{x}_i^{(i)}; n\Delta t) \int_{V_i} \bar{A}_i(\bar{x}_i^{(i)}; \bar{x}_0^{(i)}; (N-n)\Delta t) d\bar{x}_0^{(i)} + \Delta t \sum_{j=1}^{N_c} \sum_{n=1}^{N-1} \bar{F}_{ji}(\bar{x}_j^{(j)}; n\Delta t) \int_{V_j} \bar{A}_j(\bar{x}_j^{(j)}; \bar{x}_0^{(j)}; (N-n)\Delta t) d\bar{x}_0^{(j)} - \int_{V_i} \int_0^t \bar{A}_i(\bar{x}_i^{(i)}; \bar{x}_0^{(i)}; t-t_0) \bar{F}_i(\bar{x}_0^{(i)}; t_0) dt_0 d\bar{x}_0^{(i)} + \int_{V_j} \int_0^t \bar{A}_j(\bar{x}_j^{(j)}; \bar{x}_0^{(j)}; t-t_0) \bar{F}_j(\bar{x}_0^{(j)}; t_0) dt_0 d\bar{x}_0^{(j)}$$

La résolution de ce système linéaire, pas de temps après pas de temps, donne directement les efforts de couplage en fonction du temps. On peut bien entendu utiliser d'autres schémas numériques.

3.2. Méthode de type Galerkin

La méthode de type Galerkin que l'on développe ici s'appuie sur la décomposition des efforts inconnus sur une base de fonctions trigonométriques utilisées par la suite dans une formulation variationnelle des équations du système (3) et (6), afin d'en tirer les coefficients de la série approchée. Elle permet donc une étude dans le domaine temporel tout en étant a priori plus rapide que l'intégration directe. Ainsi, remplacer les efforts de couplage dans (3) et (6) par la série approximative :

$$\bar{F}_{ik}(\bar{x}_k^{(i)}; t) = \sum_{m=0}^M a_{ikm}(\bar{x}_k^{(i)}) \phi_m(t_0) \quad (8)$$

avec : a_{ikm} : coefficients de la série à déterminer ; ϕ_m : fonction trigonométrique de la série permet de construire un système linéaire évaluant les coefficients a_{ikm} puis les efforts aux liaisons.

4. APPLICATION

4.1. Construction de l'équation

On applique le processus décrit dans les deux paragraphes précédents à un assemblage de deux poutres Euler-Bernouilli identiques, couplées, de section rectangulaire, homogènes élastiques, isotropes et simplement appuyées (figure 2), dont l'une est excitée par un choc mécanique de type demi-sinus de la forme :

$$F(t) = A_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) Y(t - T_0) \quad (9)$$

avec : A_0 : amplitude de l'excitation ; T_0 : durée du choc ; Y : fonction de Heaviside

EFFORTS AUX JONCTIONS DANS LES ASSEMBLAGES EXCITES PAR CHOC

On ne considère en première approximation que le mouvement de flexion des deux poutres. Isolant chacune d'entre elles et introduisant des efforts à la liaison pour modéliser l'effet d'une poutre sur l'autre, on obtient pour le mouvement de flexion les équations différentielles suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} EI \frac{\partial^4 W_1(x^{(1)};t)}{\partial x^{(1)4}} + \rho S \frac{\partial^2 W_1(x^{(1)};t)}{\partial t^2} + \rho S c \frac{\partial W_1(x^{(1)};t)}{\partial t} &= F(t) \delta(x^{(1)} - X_0) + M_{11}(t) \delta'(x^{(1)} - l) \quad \text{pour la poutre 1} \\ EI \frac{\partial^4 W_2(x^{(2)};t)}{\partial x^{(2)4}} + \rho S \frac{\partial^2 W_2(x^{(2)};t)}{\partial t^2} + \rho S c \frac{\partial W_2(x^{(2)};t)}{\partial t} &= M_{21}(t) \delta'(x^{(2)}) \quad \text{pour la poutre 2} \end{aligned} \right. \quad (10)$$

avec : E : module d'Young ; I : moment d'inertie ; ρ : masse volumique ; S : section des poutres ; c : coefficient d'amortissement

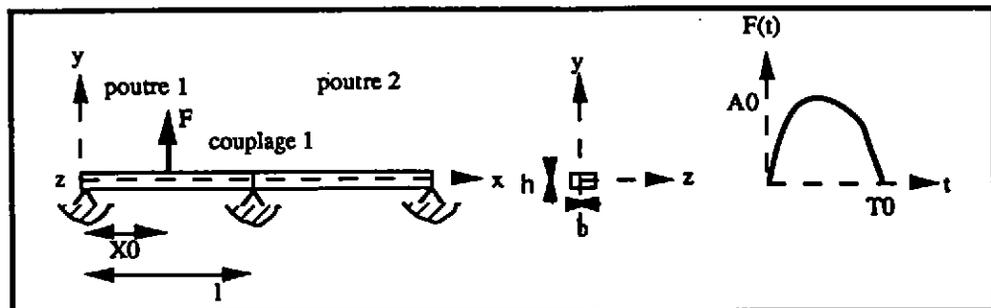


figure 2 : Assemblage étudié et allure de la sollicitation

Les efforts introduits, $M_{11}(t)$ et $M_{21}(t)$, sont des moments fléchissants du fait de l'appui existant à l'interface. Au niveau de la liaison, on a les équations de continuité et d'équilibre suivantes dans le cas d'un couplage rigide et conservatif et tenant compte des admittances impulsionnelles (4) :

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^l \int_0^t \frac{\partial A}{\partial x^{(1)}} (1; x_0^{(1)}; t-t_0) (F(t_0) \delta(x_0^{(1)} - X_0) + M_{11}(t_0) \delta'(x_0^{(1)} - l)) dx_0 dt_0^{(1)} &= \int_0^l \int_0^t \frac{\partial A}{\partial x^{(2)}} (0; x_0^{(2)}; t-t_0) M_{21}(t_0) \delta'(x_0^{(2)}) dx_0 dt_0^{(2)} \\ M_{11}(t) + M_{21}(t) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (11)$$

L'équation différentielle (5), appliquée aux mouvements de flexion d'une poutre isolée simplement appuyée, permet d'évaluer A par analyse modale. On a ainsi :

$$A(x; x_0; t) = \frac{2}{l \rho S} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_p t} \sin \Omega_p t}{\Omega_p} \sin \frac{p \pi x}{l} \sin \frac{p \pi x_0}{l} \quad (12)$$

EFFORTS AUX JONCTIONS DANS LES ASSEMBLAGES EXCITES PAR CHOC

avec l : longueur de la poutre p : indice de mode, ω_p : pulsation propre du mode p , ζ : coefficient d'amortissement, $\Omega_p = \omega_p \sqrt{1 - \zeta^2}$

Il est alors possible de simplifier analytiquement le système (11) en tenant compte de l'égalité (12). On obtient l'équation suivante :

$$2 Z(t) * M(t) = C_f(t) \tag{13}$$

dans le domaine temporel, avec :

$$\left\{ \begin{aligned} Z(t) &= \frac{2}{l\rho S} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2 \frac{e^{-\zeta\omega_p t} \sin \Omega_p t}{\Omega_p} \\ C_f(t) &= \frac{2}{l\rho S} \int_0^t \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{p\pi}{l} \frac{e^{-\zeta\omega_p(t-t_0)} \sin \Omega_p(t-t_0)}{\Omega_p} \sin \frac{p\pi X_0}{l} F(t_0) dt_0 \end{aligned} \right.$$

La résolution de cette équation par les méthodes évoquées dans le chapitre précédent permet d'obtenir $M(t)$, contrainte à la jonction des deux poutres dans le domaine temporel.

La méthode d'intégration directe permet de déconvoluer l'équation (13) pour obtenir la relation suivante :

$$M(t-\Delta t) = \frac{1}{Z(\Delta t)} \left(- \sum_{n=1}^{N-2} (M(n\Delta t) Z((N-n)\Delta t)) + \frac{1}{2\Delta t} C_f(t) \right) \tag{15}$$

Le calcul de la première partie du numérateur, sous la forme d'un produit de convolution, peut en outre être accéléré en utilisant un procédé itératif basé sur la formulation récurrente de $Z(t)$.

Avec la décomposition du moment fléchissant en fonctions harmoniques dans la méthode de type Galerkin, on a :

$$M(t) = \sum_{m=0}^M b_m \cos \frac{m\pi x}{T} \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T \tag{16}$$

avec : T durée temporelle d'étude et b_m : solution de l'équation $[A]\{b\} = \{d\}$ avec

$$A_{nm} = \int_0^T (2 Z(t) * \cos \frac{m\pi t}{T}) \cos \frac{n\pi t}{T} dt \quad \text{et} \quad d_n = \int_0^T C_f(t) \cos \frac{n\pi t}{T} dt$$

La construction de l'équation (13) s'est faite dans le cas d'un couplage rigide et conservatif. On aurait pu prendre un couplage non linéaire, par exemple soumis à une friction de Coulomb $Q > 0$, de telle sorte que les conditions au couplage deviennent, :

EFFORTS AUX JONCTIONS DANS LES ASSEMBLAGES EXCITES PAR CHOC

$$\begin{cases} M_{11}(t) = -Q \operatorname{sign} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^{(1)} \partial x^{(1)}}(x_1^{(1)}; t) - \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^{(2)} \partial x^{(1)}}(x_1^{(2)}; t) \right) \\ M_{11}(t) + M_{21}(t) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

L'allure du moment à la jonction est alors calculée pas de temps par pas de temps, en étudiant à chaque étape le signe de la vitesse de rotation relative entre les deux poutres. Les résultats numériques sont toutefois menés dans le cas du couplage rigide par souci de simplicité.

4.2. Résultats numériques

L'étude paramétrique et les comparaisons des méthodes s'effectuent pour des cas de figure représentatifs de la mécanique et du bâtiment et font ressortir diverses tendances. Ainsi, les décompositions modales, faisant appel à des sommations théoriquement infinies mais forcément limitées numériquement, ne nécessitent que la prise en compte des modes de fréquence propre inférieure ou égale à celle correspondant à T_0 . Pour le cas de deux poutres couplées simplement appuyées, les modes d'ensemble observés sont ceux d'une poutre appuyée à une extrémité et encastree à l'autre, l'encastrement représentant l'influence de la poutre réceptrice sur la poutre excitée. Le pas de temps Δt n'a pas le même rôle suivant la méthode employée pour le calcul. Dans le cas de la méthode d'intégration directe, la précision du résultat est directement reliée au maillage temporel. Ainsi, le pas de temps limite supérieur à partir duquel on aura divergence peut être évalué grâce à la condition de Shannon qui donne l'échantillonnage adéquat par rapport à la fréquence maximale prise en compte. Ainsi, on relie le nombre de modes et le Δt choisi de telle sorte que :

$$\Delta t \leq \frac{1}{2 N_p^2 f_1} \quad (18)$$

avec : N_p : nombre de modes pris en compte ; f_1 : première fréquence propre de poutre.

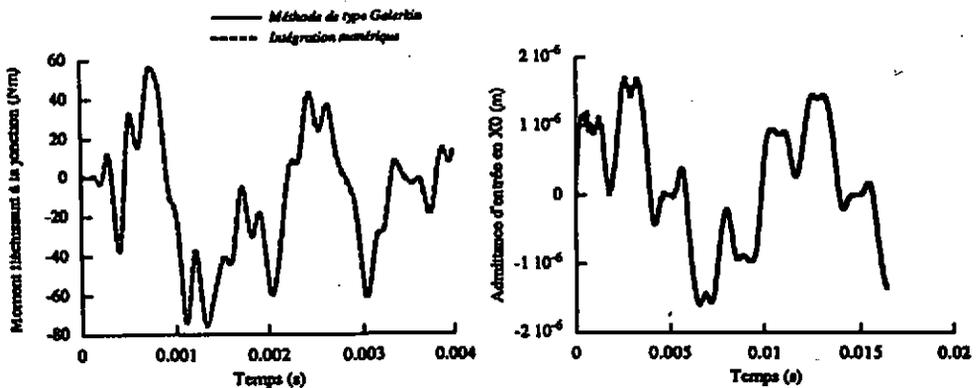


figure 3: Moment fléchissant à la jonction et admittance en fonction du temps

Par contre, Δt n'influe pas sur la méthode de type Galerkin qui dépend pour sa part essentiellement du nombre de degrés de liberté M maximum intervenant dans la série harmonique approchant le moment fléchissant. Cette méthode est donc généralement plus intéressante que l'intégration numérique en termes de temps de calcul. En ce qui concerne M , celui-ci doit permettre, dans la série approchant le moment fléchissant, de prendre en compte les fréquences inférieures ou égales à celle liée à la durée de l'excitation., fréquences des modes qui sont excités et participent à la réponse vibratoire. On montre donc sur la figure 3 le moment fléchissant à la jonction (Nm) en fonction du temps (s) pour les deux méthodes en décomposition modale (10 modes pris en compte) et dans un cas bâtiment de caractéristiques $E = 2,810^{10} \text{ Nm}^{-2}$, $\rho = 2300 \text{ kgm}^{-3}$, $\zeta = 10^{-2}$, $b \times h \times l = 0,4 \times 0,4 \times 2,5 \text{ m}^3$, $A_0 = 1000 \text{ N}$, $X_0 = 0,5 \text{ m}$ et $T_0 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$. Les deux résultats sont parfaitement superposés et permettent, outre de donner un aperçu des modes d'ensemble du système, d'estimer également l'état de contraintes de la jonction. On peut ainsi déterminer l'instant de survenance du maximum de contraintes, lié en grande partie au premier mode d'ensemble de l'assemblage. L'admittance directe au point d'excitation sur la poutre 1 est également donnée sur la figure 3. On remarque que A ne fait ressortir que les caractéristiques modales de la poutre isolée, contrairement au résultat couplé que représente l'effort à la jonction.

5. CONCLUSION

L'étude reportée ci-dessus a permis de mettre en place les bases d'une méthode d'analyse vibratoire d'assemblages de structures simples excités par des chocs, grâce à la sous structuration géométrique des assemblages, l'introduction d'efforts aux liaisons modélisant l'influence des structures les unes sur les autres et la caractérisation par admittances impulsionnelles des systèmes isolés. La résolution des équations posées en termes d'efforts aux liaisons a été menée par intégration directe et par une méthode de type Galerkin. Une étude paramétrique numérique a défini plus précisément ces différentes techniques et leur domaine d'application optimum. Les résultats obtenus sous forme d'efforts aux liaisons donnent une idée de l'état de contraintes à la jonction duquel on peut déduire la puissance échangée à cet endroit et donc l'évolution globale de l'énergie des structures. Ces différentes remarques sont illustrées dans le cas de deux poutres couplées simplement appuyées. On fait ressortir la prépondérance de la méthode de type Galerkin en rapidité et précision, hormis dans le cas où l'intégration directe est accélérée par un processus itératif. Dans les cas linéaires, une transformation de Fourier inverse reste toutefois préférable, à partir du moment où les structures ont un temps de réverbération structural faible.

6. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] R.J. PINNINGTON et R.G. WHITE. 'Power flow through machine isolators to resonant and non resonant beams'. *Journal of Sound and Vibration*, **75**, N° 2, p.179-197 (1981)
- [2] D.J. MEAD et Y. YAMAN. 'The harmonic response of uniform beams on multiple linear supports : a flexural wave analysis'. *Journal of Sound and Vibration*, **141**, N° 3, p.465-484, (1990)
- [3] G.J. DOCKERTY et C.M. LEECH. 'Stress propagation through jointed beam systems using finite element theory'. *International Journal of Mechanical Science*, **23**, N° 8, p.457-471, (1981)
- [4] J.M. CUSHIERI. 'Structural power flow analysis using a mobility approach of an L-shaped plate'. *Journal of the Acoustical Society of America*, **87**, N° 3, p.1159-1165, (1990)
- [5] J.M. CUSHIERI. 'Vibration transmission through periodic structures using a mobility power flow approach'. *Journal of Sound and Vibration*, **143**, N° 1, p.65-74, (1990)